PROSPETTO

DI ANALISI
DI GEOMETRIA ELEMENTARE
E TRIGONOMETRIA
E DI GEOMETRIA SUBLIME

CHE

SOTTO I GLORIOSI AUSPICJ

DI S. M. C.

DON CARLO IV.

RE DI SPAGNA

ECC. ECC. ECC.

PROPONE ALL' ESAME DEL PUBBLICO

IL CONTE

D.[N] GIROLAMO GNECCO

AL SERVIGIO DI S. M. C. NEL CORPO DELLE RR. GUARDIE WALONE

ALUNNO

DEL COLLEGIO DI S. CATERINA DI PARMA

PRINCIPE EMERITO, ED ASSESSORE DI LETTERE

NELL' ACCADEMIA DEGLI SCELTI

CO' TIPI BODONIANI

MDCCCIII.

SACRA REAL MAESTÀ

La singolare clemenza, AUGUSTO MONARCA, colla quale, accumulando Voi le grazie concedute alla mia famiglia, vi degnaste onorarmi, non ascrivendomi solo

alla Cittadinanza Spagnuola, ma arrolandomi eziandío al nobilissimo, e distintissimo Corpo delle Vostre Reali Guardie Walone, eccitò nel mio tenero cuore i più dolci sensi di giubbilo, e gl'incentivi più forti di una fervida riconoscenza. Già da quel tempo consecrai al servizio della M. V. tutte le mie tenui forze, e tutto l'ingegno mio, ed aspirai fin d'allora alla singolar gloria di potervi presentar un giorno un tributo della mia gratitudine, offerendovi, come ſo presentemente, questo pubblico sperimento del mio qualunque siasi avanzamento nelle Matematiche Discipline.

L'alta stima, e possente protezione, colla quale la M. V., seguendo le orme illustri de' Vostri gloriosi Predecessori, onora, ed ingrandisce questa sublime

scienza, l'instancabile zelo, con cui procura, e promove la cultura, e gli avanzamenti di questa facoltà nella Nazione, e principalmente nel Corpo Militare delle Vostre Truppe, mi fanno concepire una non lieve speranza, che quantunque piccolo possa dirsi questo mio umile tributo, nol riputerà tuttavìa la M. V. indegno della grandezza del Vostro animo, a cui tutto grande apparisce, quanto può animare, ed incoraggire la gioventù a correre la malagevole, e lunga letteraria carriera.

L'Accademia di S. Ferdinando, le Scuole Militari di Ocaña, di Segovia, e di Barcellona, le Scuole Nautiche, ed Astronomiche di Cadice, del Ferrol, e di Cartagena, illustri monumenti de' Vostri Augusti Predecessori, e superba-

mente ingranditi, e protetti dalla Vostra beneficenza, evidentemente convincono, quanto interessi il nobile Cuore della M. V. la giusta direzione della gioventù, i sublimi progressi di questa Scienza, e l'istruzione di questa massimamente nei Militari. Noi siamo debitori a questi gloriosi stabilimenti, dei nomi illustri di un Giorgio Iuan, di un Ulloa, di un Bails, di due Siscar, di un Tofiño, di un Doz, di un Mendoza, di un Vargas, e di tanti altri, che riunendo ai militari talenti un perfetto conoscimento della Matematica, si acquistarono un nome illustre, e segnalato.

Infiammato da sì nobili esempj, ed affidato alla protezione Vostra, Augusto Monarca, io non dubitai entrare nel difficile accennato impegno, sperando,

confortato dal Nome Vostro, di poter superare le difficoltà tutte, che mi presentavano le grandi, e le sublimi teorìe, che esponevami a dimostrare, e la tenuità, e scarsezza de' miei talenti.

Si dà facoltà a tutti i Signori Professori e Padri Lettori, che vorranno favorire, d'interrogare, dopo i tre primi, sopra qualunque dei punti proposti.

PRIMA PARTE.

ANALISI.

I. Algebra, ossia Analisi è la scienza dei numeri. Tutto è indeterminato nell'Analisi, anche gl'istessi numeri. Nell'Aritmetica comune si presentano soltanto alcuni metodi di computarli, di cui si ha bisogno nella società civile. L'Analisi al contrario gli abbraccia tutti, ed è un'Aritmetica universale. Tutte le scienze, che considerano le grandezze di qualunque genere esse sieno, sono appoggiate a questa sublime scienza, e da essa dipendono necessariamente: e tutte divengono analitiche, determinata soltanto la specie della grandezza, o del numero. La stessa Geometría trattata analiticamente è salita ad una elevazione, che sorprende, ed a cui forse si credeva, che essa non potesse giungere; e le sue giornaliere invenzioni dimostrano ad evidenza tutta la capacità, ed estensione maravigliosa di forza, ed attività dell'umano intendimento.

Del metodo Analitico.

II. La composizione, e risoluzione delle grandezze forma tutta l'Analisi. Noi otteniamo la composizione delle quantità, o sommandole insieme, o moltiplicandole, o elevandole a qualunque

potenza. Servendoci del celebre canone Nevvtoniano eleveremo le quantità binomie a qualunque dignità, determinata essa sia, o indeterminata. Noi dimostreremo la legge non men degli esponenti, che la legge de' coefficienti; ed estenderemo il canone Newtoniano alle quantità complesse, binomie esse sieno, o trinomie, e dotate di qualunque esponente, o coefficiente.

Il metodo Nevvtoniano non vien meno, sebbene le quantità sieno elevate ad esponenti frazionarj, o irrazionali. Perciò eleveremo a qualunque dignità i binomii.

1. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

2. $a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}}$

III. Similmente la risoluzion delle grandezze si ottiene per la sottrazione, divisione, o estrazione delle radici delle quantità. Noi ci serviremo dello stesso canone Nevvtoniano per la risoluzione delle equazioni di qualunque grado, purchè non manchi niun termine, e sieno le radici uguali.

IV. Il medesimo metodo serve ancora per estrarre da qualunque numero dato le radici numeriche di qualunque ordine. Noi daremo pertanto risolute le seguenti

Equazioni.

1. $x^5 + 5\,x^4\,a + 10\,x^3\,a^2 + 10\,x^2\,a^3 + 5\,x\,a^4 + a^5 = o$

2. $x^4 + 4\,x^3\,b + 6\,x^2\,b^2 + 4\,x\,b^3 + b^4 = o$

3. $x^3 + 3\,x^2\,c + 3\,x\,c^2 + c^3 = o$

4. $\sqrt{15129}$

5. $\sqrt[3]{14886936}$

6. $\sqrt[4]{4477456}$

V. In oltre daremo la risoluzione di tutte l'equazioni di qualunque ordine, quantunque le radici non sieno uguali, purchè l'equazione sia completa, e la somma dei fattori, da cui risulta l'ultimo termine, uguagli il coefficiente del secondo termine.

Esempj.

1. $x^3 + 21\,x^2 + 146\,x + 336 = o$
2. $x^3 + 9\,a\,x^2 + 26\,a^2\,x + 24\,a^3 = o$
3. $x^4 + 14\,x^3 + 71\,x^2 + 154\,x + 120 = o$
4. $x^5 + 15\,a x^4 + 85\,a^2 x^3 + 225\,a^3 x^2 + 274\,a^4 x + 120\,a^5 = o$

Della Trasformazione dell' Equazioni di qualunque ordine.

VI. Ogni equazione di qualunque ordine si può trasformare in un'altra. Per questo metodo si possono accrescere, e diminuire le radici della equazione proposta, di una quantità qualunque data.

VII. Trasmutare le radici in altre, a cui abbiano esse una ragione qualunque similmente data.

VIII. Liberare l'equazione dalle frazioni, se mai vi fossero, ed eliminare qualunque termine della equazione proposta.

Noi proponiamo qualche esempio.

IX. Eliminare il 2.do termine della equazione

$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = o$

X. Accrescere, o diminuire le radici nella equazione

$x^4 + b\,x^2 + c\,x + q = o$ di una quantità qualunque, ex. gr. m, o trasformarla in un'altra, in cui le radici abbiano alla proposta equazione una ragione qualunque data.

XI. Liberare dalle frazioni l'Equazione
$x^3 + \frac{a}{b} \cdot x^2 + \frac{a^2}{c} x - a^3 = o$

Della risoluzione Analitica dell'Equazioni del secondo, e terzo ordine.

XII. I metodi, che abbiamo proposti, come pure gli altri inventati dagli Analisti per la risoluzione generale dell' equazioni, sono tutti complicati e difficili, e pieni di tedio, specialmente quando sono molti i divisori dell' ultimo termine. Non sono inoltre nè universali, nè necessarj, e nemmeno si possono per essi risolvere l' equazioni più semplici di secondo grado, se le radici sieno sorde o immaginarie. Ad onta degli sforzi de' più sublimi ingegni, noi non possiamo aver universalmente, se non per una approssimazione, le radici dell' equazioni. Il metodo Cardanico è il solo, che abbia potuto sormontare tutte queste difficoltà. Pur nondimeno questo metodo non è universale, nè si possono per esso risolvere l' equazioni al di là del quarto grado. Questo è il limite prescritto ai metodi ritrovati sinora. Anzi il Sig. Paolo Ruffini nel suo egregio trattato: *Teoria generale dell' equazioni* ec. pretende dimostrare essere affatto impossibile la risoluzione analitica dell' equazioni, che superano il quarto grado. Perciò noi limitiamo le nostre idee, e daremo soltanto la risoluzione analitica dell' equazioni di secondo, terzo, e quarto grado.

XIII. Scipione Bolognese fu il primo inventore del metodo attribuito comunemente al Cardano. Noi daremo l' analisi di questo metodo, e risolveremo qualunque equazione di secondo grado, che ci si proponga, e dimostreremo i due fattori, in cui può essa risolversi, e che moltiplicandosi insieme, restituiscono sempre

l'equazione proposta, e per cui essa è necessariamente divisibile. In un un sol caso il metodo Cardanico non è infallibile, cioè quando le due radici dell'equazione sieno immaginarie; ma in questa ipotesi basta moltiplicarle per la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, e mutare tutti i segni dei prodotti. Il R. Padre Cossali Teatino, e celebre Professore della nostra Università, propone una correzione da farsi, per cui si scansano le radici immaginarie, e si hanno sempre reali. [a]

XIV. Il metodo Cardanico può estendersi alle equazioni di qualunque grado, purchè la radice del primo termine sia moltiplicata per qualunque quantità, e svaniscano tutti gli altri termini. Noi rappresentiamo l'equazioni di questo genere sotto questa forma universale:

$$x^{2n} \pm A x^n \pm B = 0$$

in cui le quantità A, B, ed n possono essere positive non meno, che negative. Lo stesso metodo Cardanico può estendersi ancora all'equazioni di qualunque ordine, qualunque sia il massimo esponente. Le condizioni però richieste vie più si moltiplicano a misura, che l'equazioni proposte sono di un ordine maggiore, e vie più si ristringe il numero dell'equazioni risolubili per questo metodo. Qualunque però sieno l'equazioni di terzo grado, possono esse sempre risolversi pel metodo Cardanico. Non si richiede altra condizione, se non che sieno prive del secondo termine, ciocchè può ottenersi sempre pel metodo delle Trasformazioni. Noi dimostreremo, che le radici di qualunque equazione di terzo grado possono rappresentarsi per questa formola:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}}$$

(a) Origine e trasporto in Italia. Primi progressi in essa dell'Algebra ec. Vol. I.

la quale moltiplicata per le radici cubiche delle unità, ci darà tre fattori, da cui può risultare qualunque equazione di terzo ordine.

XV. L'equazioni di quarto grado sono pure soggette al metodo Cardanico. Per esso si possono sempre risolvere in due equazioni di secondo grado, purchè sieno prive del secondo termine. Perciò noi dimostreremo, che l'equazione Ecumenica

$$x^4 + a\,b\,x^2 + a^2\,c\,x + a^3\,d = o$$

può sempre risolversi in questi due trinomii reali

$$1.\ x^2 - x\sqrt{am} + \frac{ac\sqrt{a}}{2\sqrt{m}} + a.\overline{\frac{b+m}{2}}$$

$$2.\ x^2 + x\sqrt{am} - \frac{ac\sqrt{a}}{2\sqrt{m}} + a.\overline{\frac{b+m}{2}}$$

Della natura dell' Equazioni.

XVI. Ogni proporzione si può convertire in equazione, come ogni equazione può trasformarsi in proporzione, risolvendola nei fattori, che la compongono. L'equazione sarà di primo grado, se la quantità fluente, o incognita sia lineare. Sarà poi di secondo, o terzo grado ec., se l'incognita ascenda al secondo, o terzo grado ec. Se vi fossero più variabili, tante saranno l'equazioni, quanto è il numero delle incognite, o variabili. Il Problema sarà sempre insolubile, se il numero delle condizioni eccederà il numero delle variabili, purchè una condizione non si contenga nell' altra. Se però il numero delle condizioni sia minore del numero delle variabili, il Problema sarà solubile, ma indeterminato. L'equazioni si formano dalle condizioni del Problema; ed allora soltanto avremo risoluto il Problema, quando dalle quantità conosciute determineremo il vero valore della variabile. Nell' equa-

zioni di secondo grado, o degli ordini superiori, una almeno delle radici darà la soluzione del Problema, che si è proposto.

PROBLEMI DETERMINATI di primo grado.

XVII. Un padre ha il sestuplo dell'età del suo figlio, e la somma della loro età è 91. Qual è la loro età?

XVIII. Un tremuoto abbattè in un giorno la metà delle case di una città; nel giorno dopo un terzo, e un duodecimo negli altri giorni, di modo che restano in piedi 63 case. Quante ne aveva la città?

XIX. Tre amici, che chiamo B. C. D. giuocarono al Lotto. Il giuoco di B e C fa lire 21, quello di B e D ne fa 24, e quello di C, D 27. Quanto ha messo ciascuno?

XX. Un padre lascia al figlio maggiore 1000 scudi, e un sesto di ciò che resta; al secondo 2000, e un sesto del resto; e così fino all'ultimo. Fatte le parti si trova che i figli hanno ereditato per egual porzione. Si cerca 1.° l'asse paterno, 2.° il numero dei figli, 3.° la parte di ciascuno.

XXI. A e B postisi al giuoco con egual somma han perduto. La perdita di A è di scudi 12: quella di B è 57; e B ha solo il quarto del denaro, che resta ad A. Quanto avevano in principio?

XXII. Qual è il numero, di cui il terzo, e il quinto differiscono di 8?

XXIII. Diviso un numero per sei, si è avuto un tal quoziente, che sommato col dividendo, e col divisore dà 69. Qual è questo numero?

XXIV. Una casa di due piani ha 36 piedi d'altezza, e il primo piano è 4 piedi più alto del secondo. Qual'è l'altezza di ciascheduno dei piani?

XXV. Avendo dei gettoni nelle mani, ne passo uno dalla destra alla sinistra, e con ciò ne ho un ugual numero in ambedue: ma se ne passassi due dalla sinistra alla destra, questa ne avrebbe il doppio dell'altra. Quanti gettoni erano da principio in ciascuna mano?

XXVI. Una Camerata di Collegiali ita a fare una merenda in campagna, trova che se fossero state tre persone di più, ciascuno avrebbe pagato 20 soldi di meno; e se vi fossero state due di meno, ciascuno avrebbe dovuto pagare 20 soldi di più. Erano 12 alla merenda. Quanto costa a ciascuno di essi?

PROBLEMI DETERMINATI

Di secondo grado.

XXVII. Alcuni andati all'osteria vi pranzarono, la spesa fu di 40 lire: quando si trattò di pagare due di essi fuggirono, e ciascuno degli altri dovette pagare 20 soldi di più. Quanti erano a questo pranzo, e quanto dovette pagare ciascuno?

XXVIII. Un Signore vendette due cavalli, uno de' quali era assai più bello dell'altro. Domandò del più bello la metà del quadrato di quella somma, che costava il secondo, e l'ebbe: riscosse in tutto 112 zecchini. Quanto costò l'uno, e l'altro?

XXIX. Un Generale vorrebbe disporre una truppa in battaglione quadrato; ma nella sua prima disposizione avanzano 124

uomini, e aggiungendo un uomo ad ogni fila ne mancano 129. Quanta è la truppa?

XXX. Trovare un numero, il di cui quadrato aggiunto al doppio dello stesso numero faccia 143.

XXXI. Un Generale volendo far sapere quanti Soldati ha perduti in battaglia, e quanti glie ne restano ancora, esprime le centinaja degli uni, e degli altri con le unità della seguente equazione $x^2 - 16x - 161 = 0$, che manda qual cifra al suo Sovrano, con cui egli è inteso, che la radice positiva esprime i vivi, la negativa i morti.

PROBLEMI DETERMINATI

Di terzo grado.

XXXII. Trovare un numero, in cui una terza parte del suo cubo sia 576.

XXXIII. Trovare un numero, che moltiplicato per due quinti del suo quadrato faccia 400.

XXXIV. Trovare un numero tale, che dividendo la sua potenza quarta per la metà del medesimo numero, ne risulti 2662.

XXXV. Trovare un numero, la di cui potenza quarta divisa per la quinta parte del medesimo numero, ed aumentato di 355, dia 4000.

XXXVI. Che ora è? domandò uno ad un Matematico. Gli rispose: Se al quadrato di 3 ore fa, moltiplicato per l'ora presente, aggiungerete 12 volte il quadrato dell'ora presente, e toglierete 18 volte l'ora presente, avrete 54. Si domanda che ora era?

XXXVII. *A* comprò da *B* due bellissimi anelli di brillanti. Il primo lo pagò tanti luigi, quanto era il numero de' brillanti dell'anello elevati al cubo. Il secondo lo pagò tanti luigi, quanto era il numero de' brillanti moltiplicato per $3a$, vale a dire per una quantità conosciuta. Oltre di ciò dovette pagare ancora altri 160 luigi. Si domanda quanto costò ciascuno degli anelli, e quanti brillanti contenevano?

PROBLEMI DETERMINATI
Di quarto grado.

XXXVIII. Un giovane domandò ad un vecchio quanti anni aveva. Dividete, disse allora il vecchio, 60993000 per il quadrato de' miei anni, a cui aggiungete 570, e questo numero formerà un quadrato perfetto degli anni miei. Si domanda qual era la sua età?

XXXIX. Un Signore comprò una tenuta. In due rate sborsò due somme. La prima di 100 scudí, e la seconda di 6336. Fatto il calcolo si trovò, che levando dal cubo del prezzo il prodotto della prima rata per il prezzo, questo resto uguagliava la seconda rata, divisa per l'importo della tenuta. Quanto si sborsò di più?

ANALISI INDETERMINATA.

XL. Fra gl'illustri comentatori delle opere di Diofanto, solo Bacchetto, e Fermat aggiunsero qualche cosa alle sue invenzioni. Nei nostri tempi, perfezionata l'Analisi, due sommi Geometri Eulero, e de la Grange trattarono lo stesso argomento, e ne

hanno perfezionata la teorìa. Noi ne daremo qualche saggio risolvendo alcune questioni.

PROBLEMI INDETERMINATI
Di primo grado.

XLI. Ogni equazione indeterminata di primo grado può rappresentarsi per questa formola universale $ax + by = c$, presupposto che vi sieno due sole incognite, in cui a b c sieno numeri positivi. In questo caso non potranno essere infinite le soluzioni; ma se a, o b sieno negativi, si dovrà risolvere in numeri interi, e positivi l'equazione $ax + by = c$, e saranno quasi infinite le soluzioni.

XLII. Trenta persone Cavalieri, e Dame coi loro servitori hanno speso tra tutti 100 scudi in un viaggio. La spesa di ciascun Cavaliere è di 3 scudi, la spesa di ciascuna Dama è di 5 scudi, la spesa di ciascun servitore è di uno scudo. Si cerca quanti erano i Cavalieri, quante le Dame, e quanti i servitori?

XLIII. Tre donne hanno venduto delle pernici al mercato. La prima ne ha vendute 10, la seconda 25, e 30 la terza. Nell' uscire dal mercato, parlando del denaro, che hanno riscosso, trovano, che hanno tutte un' egual somma. Si cerca a qual prezzo le abbiano vendute.

XLIV. Due Camerate di Collegiali in un giorno di diporto spesero 88 lire. Prendendo di 5 in 5 le lire spese dalla prima Camerata, ne avanzano 4; e prendendo di sei in sei le lire spese dalla seconda Camerata, ne avanzano similmente 4. Si domanda quante lire spese la prima Camerata, e quante la seconda.

XLV. Tre giuocatori perdettero 100 zecchini. Si osservò che il triplo della perdita del primo, unito al duplo della perdita del secondo, formava 120 zecchini. Si domanda la perdita di ciascuno.

XLVI. Due mercanti guadagnarono una certa somma. Sottraendo il guadagno del secondo moltiplicato per 8 dal guadagno del primo moltiplicato per 5, rimaneva un residuo di 100 scudi. Si ricerca il guadagno d'ambedue.

PROBLEMI INDETERMINATI
Di secondo grado.

XLVII. I Problemi indeterminati di secondo grado si riducono a questa formola universale $\sqrt{a+bx+cx^2}$, la quale si può trasformare in quest'altra Ax^2+B, in cui le quantità A, o B possono supporsi quadrati, e non quadrati. Nella prima ipotesi è sempre più facile la soluzione. Noi daremo qualche esempio nell'una, e nell'altra ipotesi.

XLVIII. Ritrovare un numero, a cui o aggiunta, o levata l'unità, sia sempre numero quadrato.

XLIX. Ritrovare un numero, al di cui quadrato moltiplicato per 4 aggiungendo 20, resti similmente quadrato.

L. In un anello vi era un numero di brillanti. Se al quadrato di questi moltiplicato per 2 se ne aggiungeranno 4 di più, si otterrà ancora un numero quadrato. Si ricerca quanti essi fossero.

LI. Ritrovare due numeri, in cui sia data la differenza dei due quadrati.

LII. Ritrovare due numeri, in cui il quadrato del primo unito al secondo, uguagli il quadrato dello stesso, aggiunto al primo.

LIII. Si cerca un numero, che moltiplicato per 12, e per 3 formi sempre un quadrato perfetto.

LIV. Dividere un numero in due parti, di modo che il prodotto di esse formi un quadrato.

LV. Ritrovar due numeri, in cui o la somma, o la differenza dei loro quadrati dia sempre un quadrato perfetto.

LVI. Un Matematico perdette una somma al giuoco. Egli moltiplicò il quadrato della sua perdita per 21, ed aggiungendo 7 zecchini, trovò che questa somma formava un quadrato perfetto. Si cerca quanto egli perdette.

PROBLEMI INDETERMINATI

Di terzo, e quarto grado.

LVII. L'Analisi indeterminata nelle equazioni di terzo, e quarto grado presenta maggiori difficoltà, che nell'equazioni di primo, e secondo grado. Noi svilupperemo soltanto alcune delle principali ipotesi.

LVIII. Tre giuocatori giuocarono, e perdettero. La perdita di ciascheduno cresceva in progressione geometrica. Moltiplicando la perdita del primo per 4, quella del secondo per 3, e quella del terzo per 16, e poi sommando tutte queste quantità, e aggiungendo qualunque numero ad arbitrio, risultava sempre un quadrato perfetto. Si domanda il totale della perdita, e la perdita di ciascheduno.

LIX. Convertire in un quadrato perfetto la seguente equazione di terzo grado

$$2x^3 + 3x^2 + 5x + 4.$$

LX. Convertire in cubi perfetti le seguenti equazioni

1. $27x^3 + 10x^2 + 7x + 15$.

2. $6x^3 + 30x^2 + 14x + 8$.

LXI Un Generale di armata distribuì il suo esercito in 4 divisioni: la prima divisione conteneva 100 fila, la seconda 60, la terza 25, e la quarta 10. Il numero dei soldati nelle linee dei diversi corpi era in progressione geometrica. Prendendo insieme tutte queste quantità, e aggiungendovi 4, fatto il calcolo, si trovò un quadrato perfetto. Si domanda il numero dei soldati, che conteneva ogni linea, ed il numero dei soldati di tutto l'esercito.

LXII. Quattro cavalli fecero un numero determinato di miglia, le quali crescevano in continua proporzione aritmetica. Moltiplicando assieme le miglia fatte da ognuno, ed aggiungendo al prodotto 9 miglia di più, ne risultava un quadrato perfetto. Si cerca quante miglia trascorsero tutti, e quante ne fece ciascuno.

LXIII. Convertire la formola $4x^4 + 6x^3 + 20x^2 + 9x + 20$ in un quadrato perfetto.

DELLE SERIE.

LXIV. Le serie sono di un grande uso in tutta l'Analisi. Il metodo delle funzioni del Newton è appoggiato al metodo delle serie. Monsieur de la Grange in una memoria inserita nelle memorie di Berlino nel 1772 dimostra, che la evoluzione delle funzioni in serie contiene i veri principj del Calcolo Integrale, e Differenziale. Monsieur Arbogast presentò all'Accademia di Parigi un'altra memoria sull'istesso argomento; ciocchè diede motivo al suddetto Monsieur de la Grange di ritoccare le sue idee, e dar

a loro un'estensione maggiore nel suo egregio Trattato: *Théorie des fonctions analitiques* ec. Noi nel Calcolo Integrale daremo qualche piccolo saggio dell'uso della evoluzione in serie delle quantità, che non sembrano integrabili a prima vista. Per ora ci ristringeremo a dare una picciola idea di questa teorìa.

LXV. Le serie sono un aggregato di quantità, che si accrescono, o diminuiscono in una ragione data. Esse diconsi aritmetiche, o geometriche secondo le diverse ragioni, con cui crescono, o diminuiscono le quantità. Niente più facile, che il ridurre in serie le quantità: niente più difficile, che il sommare le serie, e determinare le quantità. Se si consideri soltanto la differenza, che passa fra i numeri, che compongono qualunque serie, questa dicesi Aritmetica. Se le prime differenze sieno costanti, la serie sarà del primo ordine. Se poi non le prime, ma le seconde, o terze ec. differenze solamente sieno costanti, la serie apparterrà al secondo, terzo ec. ordine.

DELLE SERIE ARITMETICHE
Del primo ordine.

LXVI. In ogni progressione aritmetica di primo ordine, dato il primo termine della serie, e la differenza, si possono ritrovare tutti gli altri termini.

LXVII. Ciascun termine della serie può rappresentarsi per questa formola $u = a + dn - d$ posta crescente la serie, ovvero per quest'altra $u = a - dn + d$, se suppongasi la serie decrescente.

LXVIII. La somma di tutti i termini di una serie del primo ordine si può esprimere per questa formola $S = \frac{an + un}{2}$

LXIX. Dati due termini qualunque, inserire quanti mezzi aritmeticamente proporzionali si vorranno.

LXX. Dati tre dei cinque numeri, di cui sono composte le due formole, si possono sempre ritrovar gli altri due.

LXXI. Dato il primo termine, e l'esponente della ragione, formar la serie.

LXXII. Data la serie ritrovar il primo termine, e l'esponente della ragione.

DELLE SERIE ARITMETICHE

Del secondo, terzo ec. ordine.

LXXIII. La somma di tutti i termini delle serie del secondo, terzo etc. ordine si può rappresentare per questa formola ecumenica

$$S = An + Bn^2 + Cn^3 \text{ ec.}$$

o per quest'altra

$$S=an+n.\frac{\overline{n-1}.}{2}b+n.\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.}{2\,.\,3}c+n.\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2\,.\,3\,.\,4}.d \text{ ec.}$$

LXXIV. L'ultimo termine della serie può rappresentarsi per questa seconda formola generale.

$$A - B + C + 2Bn - 3Cn + 3Cn^2.$$

o per quest'altra

$$a+(n-1)b+\frac{(n-1).(n-2)}{2}c+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3}d \text{ ec.}$$

LXXV. Dati i tre coefficienti indeterminati A, B, C, formare la serie del secondo ordine, che ne risulta.

LXXVI. Data la serie, ritrovare i valori dei tre coefficienti indeterminati.

LXXVII. Dato il primo termine, e gli esponenti della serie di qualunque ordine, formar la serie, che ne risulta.

LXXVIII. Date le serie

1. 9, 13, 21, 33, ec.
2. 6, 10, 19, 33, ec.
3. 1, 3, 8, 20, 43, ec.
4. 2, 7, 20, 52, 114, ec
5. 3, 10, 28, 72, 157, ec.
6. 4, 13, 36, 92, 200, ec.

ritrovar le differenze, che le compongono.

LXXIX. Ritrovar nelle medesime non meno la somma di tutti i termini, che qualunque termine della serie.

PROBLEMI
Appartenenti alle Serie aritmetiche di primo, secondo, e terzo ordine.

LXXX. Un Generale ha disposti 50 corpi di guardia con quest'ordine: vi sono nel primo corpo 6 soldati, nel secondo ve ne sono 8, 10 nel terzo, e così sempre ne' successivi corpi due soldati di più, che nel precedente. Si domanda quanti soldati vi sono nel 7.^{mo}, 11.^{mo}, 31.^{mo}, e nell'ultimo corpo. In oltre quanti soldati vi sono in tutto.

LXXXI. Un Aereonauta lasciò cadere dal suo pallone volante una palla di piombo, stando attento al segno convenuto con gli spettatori, che stavano in attenzione di questo esperimento. Essi

eccitarono prontamente al cader della palla una gran fiamma con della polvere. Perciò potè l'Aereonauta misurare il tempo della discesa, che fu di 30 secondi. Si vorrebbe sapere a quale altezza fosse il pallone nel momento, che l'Aereonauta lasciò cadere la palla.

LXXXII. In una massa di palle da cannone disposte in progressione aritmetica crescente vi sono 18 ordini, ciascuno de' quali ha due palle più del vicino, e nel primo ve ne sono 4. Quante ve ne sono nell'ultimo ordine, e quante palle vi sono in tutto?

LXXXIII. Si sa dopo Galileo, che cadendo un corpo per solo impulso di gravità scorre nel primo minuto secondo 15 piedi, 45 nel secondo, e così successivamente in progressione aritmetica. Si domanda quanto spazio ha scorso questo corpo dopo 8 secondi.

LXXXIV. Un giuocatore giuocò 10 volte: la prima volta vinse 9 scudi, 13 la seconda, e 21 la terza. Si vuol sapere quanto egli vinse l'ultima volta, che giuocò, e quanta in tutto sia la sua vincita.

LXXXV. Un contadino raccolse dalla sua piccola possessione 100 staja di grano nel primo anno. Accrebbe la sua industria, e ne raccolse 3 di più nel secondo; 4 di più del secondo, nel terzo; 5 di più del terzo, nel quarto; e così cinque di più negli anni consecutivi. Si ricerca la somma del grano raccolto in 10 anni, e quanto ne raccolse nell'ultimo.

DELLE SERIE GEOMETRICHE.

LXXXVI. Serie geometrica si chiama un qualunque aggregato di numeri, che crescono, o diminuiscono in una data ragione

geometrica. Dato il primo termine, e l'esponente della ragione, si può formare qualunque serie geometrica.

LXXXVII. Dati due numeri qualunque, inserire quanti termini medii geometricamente proporzionali si vorranno.

LXXXVIII. Ogni quantità frazionaria si può ridurre in serie. Noi ridurremo la frazione $\frac{b}{x-a}$, per cui possono rappresentarsi tutte le frazioni, o per la divisione continua della quantità, o supponendola eguale ad una serie rappresentata per

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \text{ ec.}$$

LXXXIX. In ogni serie geometrica crescente del primo ordine la somma di tutti i termini si può esprimere per questa formola $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$

XC. Qualunque termine della serie, e per conseguenza l'ultimo termine sarà uguale ad aq^{n-1}, nelle quali formole la quantità a esprime il primo termine della serie, q l'esponente della medesima, ed n il numero de' termini. Se $n = 1$ le due formole saranno identiche. Dati pertanto tre de' cinque numeri componenti le due formole, si potranno sempre ottenere gli altri due. Il Problema sarà sempre algebraico, purchè non si cerchi il numero dei termini. In questa ipotesi però si può sempre ottenere la soluzione passando dai numeri ai logaritmi.

XCI. Oltre le serie, che nascono dalla continua divisione del binomio, ve ne sono delle altre, che si formano dalla evoluzione in serie dei radicali imperfetti. Noi ridurremo in serie il binomio $\overline{a + b}^{\frac{m}{n}}$

XCII. La serie sarà infinita, purchè $n > m$, ed $\frac{m}{n}$ non sia numero intiero, e positivo. Collo stesso metodo svolgeremo in se-

rie le quantità frazionarie, le quali si ponno rappresentare per questa formola $\frac{r}{\sqrt{r^2 \pm y^2}}$

PROBLEMI
Appartenenti alle Serie geometriche.

XCIII. L'Economo del Collegio prese in 5 volte del vino in progressione geometrica crescente, il di cui ultimo termine è 243 vascelli, ed il quoziente 3. Quanti vascelli prese la prima volta?

XCIV. Uno giuocando raddoppia sempre la sua posta, e perde 10 volte. La prima volta giuocò tre zecchini. Quanti ne perdette dopo la decima?

XCV. La popolazione di un paese ben costumato, ed abbondante è cresciuta uniformemente ogni anno di tanto, che contando da prima 1000 anime, si è trovata esser giunta dopo 4 anni al numero di 13824. Con qual progressione si è fatto l'aumento?

XCVI. Un litigante spese in varie liti 121000 lire. La prima gli costò 1000 lire, e raddoppiò sempre le spese nelle altre liti. Quante liti ha perduto?

XCVII. Un dissipatore consumò in 5 mesi tutto il suo asse, quadruplicando in ogni mese la spesa, che nel primo fu di 300 zecchini. Qual è il suo asse?

SECONDA PARTE.

GEOMETRIA ELEMENTARE, E TRIGONOMETRIA.

NOZIONI PRELIMINARI.

XCVIII. La Geometrìa contempla la quantità continua, e le sue situazioni diverse. Da questi due soli principj semplici nascono infiniti rapporti, ed infinite leggi, che tutte analizza, e dimostra la Geometrìa. La Meccanica, ossia la scienza dell' Universo non riconosce altri elementi, e principj; e le eterne leggi, per cui con infiniti movimenti dei corpi sussiste il maraviglioso, e semplice equilibrio dell' Universo, non possono ottenersi nè dimostrarsi, se non per mezzo della Geometrìa.

XCIX. Il punto, sebbene non quanto, pur nondimeno si considera in Geometrìa come mero elemento della quantità. Esso si suppone semplice, ed individuo, e neppur divisibile dalla nostra ragione, e per darci una idea chiara, ed esatta della formazion del composto, e per non intorbidare le idee chiare, e semplici del movimento colle idee confuse, e complicate della comunicazione del movimento. Tutti i corpi della natura in qualunque

maniera composti, possono tuttavia rappresentarsi per questo punto semplice, ed individuo; e le ragioni, e le leggi del movimento, che competono ad esso, potranno facilmente trasferirsi al composto.

Del movimento del punto, della linea, e della superficie.

C. Se un punto individuo, ed indivisibile si muova, esso descriverà una linea, che non può avere, che una sola dimensione, cioè in longitudine. Questa sola proprietà dipende dalla natura del punto. Tutte le altre dipendono dalla natura del movimento.

CI. Se il punto si muova, nè muti giammai la sua direzione, persistendo il medesimo movimento, esso descriverà necessariamente una linea retta; essa sarà la più breve, che possa condursi da un punto ad un altro, e la sola, che possa misurare la vera distanza relativa degl' intervalli. Determinati solamente due punti di essa, viene determinata la sua direzione, e posizione, quantunque s'immagini infinitamente distesa.

CII. Se però il punto si muova, e continuamente si cangi la sola direzione del suo movimento, la linea descritta non potrà essere retta, ma si descriverà necessariamente una curva. Or essendo infinite, e variabili all' infinito le direzioni del punto, infinite saranno le curve, che possono condursi da uno ad un altro punto. Esse pertanto saranno fra loro disuguali, non potranno essere perpendicolari, nè ci potranno dare le distanze relative degl'intervalli. Tuttavia fra le infinite curve, che ponno

unire due punti, si può determinare or questa, or quella curva, che abbia una proprietà determinata. Noi determineremo fra le infinite curve, che congiungono due punti, quella per cui il corpo discenderebbe nel minimo possibil tempo pel calcolo delle variazioni inventato, e perfezionato ne' nostri tempi.

CIII. Similmente, se una linea retta si muova sempre direttamente a sè stessa, si genera una superficie rettilinea, che avrà due dimensioni, cioè in longitudine, e in latitudine; e se questa superficie si supponga moversi direttamente a sè stessa, la figura generata avrà tre dimensioni, cioè in longitudine, latitudine, e profondità. Questa figura determina il corpo geometrico.

CIV. Se però la linea si consideri muoversi intorno ad un punto fisso della medesima, la superficie generata sarà curvilinea. Tutti i punti di questa linea muteranno di continuo la loro direzione, e descriveranno una figura curvilinea, in cui tutti i punti di questa linea disteranno ugualmente da un punto, che si chiama centro, e la linea nella sua rivoluzione acquisterà tutte le possibili direzioni sopra sè medesima. Questa figura si chiama circolo; figura la più perfetta, e l'unica figura curvilinea, che abbia luogo nella elementare Geometrìa.

CV. Come la ragion delle linee può dipendere da due elementi, cioè, e dalla quantità delle stesse linee, e dalle diverse loro inclinazioni, ossia dai diversi angoli, che da esse si formano, perciò la Geometrìa tutta s'interna nell'esame, e nella determinazione degli angoli, che da due, o più linee vengono generati.

LIBRO I. D'EUCLIDE.

Delle Proprietà di due linee.

CVI. Se due linee insistano l'una sull'altra formano due angoli retti, ovvero due angoli uguali a due retti.

CVII. Gli angoli verticali sono eguali.

CVIII. Se una retta insista sopra di un'altra in maniera, che due punti di essa distino ugualmente da due altri punti della retta data, essa sarà necessariamente perpendicolare, e la più breve, che vi si possa condurre.

CIX. Linee paralelle sono quelle, che hanno la medesima direzione, o che non hanno fra loro inclinazione veruna, e due punti della linea determinano la sua direzione.

CX. Da questa sola definizione noi dimostreremo tutte le proprietà seguenti, che alle linee paralelle competono.

CXI. Gli angoli alterni non meno, che gli angoli interni, ed esterni opposti alle medesime parti, come pure gli angoli esterni opposti a diverse parti sono sempre uguali.

CXII. Gli angoli interni opposti alle medesime parti, e parimenti gli esterni opposti alle stesse parti, sono uguali a 180 gradi.

CXIII. Se due rette qualunque verranno segate da un'altra in maniera, che gli angoli formati dalle medesime abbiano le stesse proprietà degli angoli, che vengono formati, poste le linee paralelle, saranno esse pure paralelle.

CXIV. Le perpendicolari fra le linee paralelle sono tutte uguali, come pure lo sono le linee comprese fra due perpendico-

lari. Il P. M. Pagnini celebre per le sue moltiplici produzioni, e Professore di Eloquenza nella nostra Università, ingegnosamente dimostra questa medesima proprietà in due linee, che sieno perpendicolari ad una terza indipendentemente affatto dalla teoria delle paralelle.

Delle Figure trilinee.

CXV. Due linee non comprendono uno spazio determinato. Fra tutte le figure rettilinee, che possono determinare uno spazio definito, la più semplice è il Triangolo, a cui possono ridursi tutti i poligoni di qualunque numero di lati, e tutte le figure curvilinee di qualunque ordine. Tutti i triangoli possono ridursi a tre classi, cioè triangoli equilateri, isosceli, e scaleni.

CXVI. Se due triangoli avranno due lati uguali, e gli angoli intercetti tra questi due lati similmente uguali, i lati non meno, che gli altri angoli corrispondenti saranno perfettamente uguali.

CXVII. Nel triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali.

CXVIII. Se due triangoli avranno due angoli uguali, e i lati opposti ad uguali angoli parimente uguali, saranno in tutto uguali.

CXIX. Se due triangoli avranno tutti i lati corrispondenti uguali saranno equiangoli, e perfettamente uguali.

CXX. In ogni triangolo l'angolo, che si oppone al lato maggiore è maggiore di quello, che si oppone al lato minore, e viceversa.

CXXI. Se due triangoli avranno due lati uguali, ma l'angolo intercetto disuguale, la base, e gli angoli saranno disuguali.

4

CXXII. Tutti gli angoli di un triangolo sono uguali a due retti.

CXXIII. In qualunque triangolo prolungando un lato, l'angolo esterno, che ne risulta, è uguale ai due interni opposti presi insieme.

Delle figure quadrilatere.

CXXIV. Se due linee uguali, e paralelle si congiungano con due altre linee, queste saranno parimente uguali, e paralelle.

CXXV. I paralellogrammi, ed i triangoli, che sono descritti fra le stesse paralelle, e che hanno la stessa base, sono uguali.

CXXVI. In ogni triangolo rettangolo il quadrato della ipotenusa è uguale ai quadrati dei due cateti.

PROBLEMI
Appartenenti al Libro I.

CXXVII. Su d'una data retta innalzare una perpendicolare, o dividerla perpendicolarmente in due parti uguali.

CXXVIII. Costruire sopra una data retta un triangolo isoscele, o equilatero.

CXXIX. Misurare la larghezza di un lago, o due punti di esso sieno accessibili, o un solo.

CXXX. Dividere un angolo qualunque in due parti uguali.

CXXXI. Dividere un angolo retto in tre parti uguali.

CXXXII. Determinare l'altezza di una torre per mezzo dell' ombra solare.

CXXXIII. Determinare dalla sommità di una torre, quando una nave, che si avvicina al porto, è a tiro del cannone della suddetta torre.

CXXXIV. Dividere un triangolo in qualunque numero di parti, ancorchè la divisione debba eseguirsi da un punto situato dentro il medesimo.

CXXXV. Convertire un poligono qualunque in un triangolo, o in un paralellogrammo sotto qualunque angolo.

LIBRO II. D' EUCLIDE.

Delle funzioni delle linee.

CXXXVI. Se una linea qualunque venga segata in un punto, il quadrato di tutta la linea sarà uguale ai rettangoli delle due parti nella linea medesima.

CXXXVII. Nella stessa ipotesi: Il rettangolo di tutta la linea in una qualunque delle parti sarà uguale al quadrato di quella parte unitamente al rettangolo delle due parti.

CXXXVIII. Similmente: il quadrato di tutta la linea sarà uguale ai quadrati delle due parti, e di più il doppio rettangolo delle medesime parti.

CXXXIX. Così pure: il quadrato d'una delle parti uguaglierà i quadrati del tutto, e dell'altra parte, sottratto il doppio rettangolo del tutto in quella medesima parte.

CXL. Se una linea si seghi ugualmente in un punto, e vi si aggiunga un' altra linea ad arbitrio, il quadrato della metà, e l'aggiunta uguaglierà perfettamente il rettangolo risultante da

tutta la linea, e l'aggiunta, moltiplicato per la parte aggiunta, e di più il quadrato della metà della linea.

CXLI. Se una retta si divida ugualmente in un punto, e disugualmente in un altro, il quadrato della metà della linea sarà uguale al rettangolo, che risulta dalla metà, e la prima parte nella seconda parte, oltre il quadrato della prima parte.

CXLII. Nella medesima ipotesi: il quadrato della metà, e la prima parte unitamente al quadrato della seconda parte, corrisponderà perfettamente al doppio quadrato della metà, più il doppio quadrato della prima parte.

CXLIII. Se ad una linea divisa in due parti uguali si aggiunga ad arbitrio una linea qualunque, sarà il quadrato di tutta la linea, e l'aggiunta unitamente al quadrato dell'aggiunta, uguale al doppio quadrato della metà, e l'aggiunta, più il doppio quadrato della metà.

CXLIV. Nella stessa ipotesi: il quadrato di tutta la linea, e l'aggiunta uguaglierà il quadruplo rettangolo della metà della linea, e l'aggiunta nell'altra metà, unitamente al quadrato dell'aggiunta.

CXLV. In ogni triangolo ottusangolo, il quadrato del lato, che si oppone all'angolo ottuso, corrisponde esattamente ai quadrati dei due lati, aggiunto il doppio rettangolo del lato in cui cade la perpendicolare nella linea intercetta fra la perpendicolare, e l'altro lato.

CXLVI. In ogni triangolo non rettangolo il quadrato del lato, che si oppone all'angolo acuto, uguaglia i quadrati dei due lati, sottratto il doppio rettangolo del lato su cui cade la perpendicolare, e la intercetta compresa fra l'altro lato e la perpendicolare nella intercetta medesima.

PROBLEMA
Appartenente al Libro II.

CXLVII. Dividere una data retta in media, ed estrema ragione.

LIBRO III. D'EUCLIDE.

Delle proprietà delle linee riferite al Circolo.

CXLVIII. La tangente tirata ad un circolo non lo può toccare che in un solo punto.

CXLIX. Tra la tangente, ed il punto del contatto, non si può tirare una linea, la quale non seghi il circolo.

CL. Ogni linea, che si conduca dal centro ad una corda, rimarrà tutta dentro del circolo.

CLI. Se si conduca una linea ad una corda minore del diametro, che abbia due delle cinque seguenti proprietà, cioè: 1.° che la linea passi pel centro, 2.° che sia perpendicolare alla corda, 3.° che seghi la medesima in due parti uguali, 4.° che divida l'arco compreso in due parti uguali, 5.° che seghi l'angolo formato dai due raggi in due parti uguali; potranno sempre determinarsi le altre tre proprietà.

CLII. Due corde nello stesso circolo saranno sempre uguali, se disteranno ugualmente dal centro, e viceversa.

CLIII. Se due corde si seghino nel circolo, i loro segmenti saranno disuguali. Detti segmenti saranno sempre reciprocamente proporzionali.

CLIV. In ogni circolo la secante, che passa pel centro, sarà la massima per rispetto alla periferia concava, e tutte le altre linee saranno tanto minori, quanto più si allontaneranno dal centro, in modo che la tangente sarà la minima di tutte queste; ma per rispetto alla periferia convessa, quella, che passa pel centro sarà la minima; le altre tanto maggiori, quanto più disteranno dal centro, in modo che la tangente sarà la massima fra tutte le possibili linee, che da un punto possano condursi alla periferia convessa.

CLV. In ogni circolo il rettangolo della secante nel segmento uguaglia il quadrato della tangente, e quindi i rettangoli tutti delle secanti tirate da un punto nei loro rispettivi segmenti sono uguali, come pure lo sono le tangenti tirate al circolo da un medesimo punto.

CLVI. Due circoli, che si segano, o che si toccano internamente, o esternamente, non possono avere un centro comune.

Della misura degli angoli formati dalle linee riferite al Circolo.

CLVII. In ogni circolo l'angolo, che ha il vertice nel centro, è doppio di quello, che ha il vertice nella periferia, quando insistano sul medesimo arco.

CLVIII. L'angolo, che si forma dalla tangente, e dalla secante nel circolo, è misurato dalla metà dell'arco che comprende.

CLIX. Detto angolo uguaglia qualunque angolo formato nell'alterno segmento.

CLX. L'angolo, che ha il vertice dentro il circolo, ha per misura la metà dell'arco compreso alla periferia concava, più la metà dell'arco compreso alla periferia convessa.

CLXI. L'angolo, che ha il vertice fuori del circolo, ha per misura la metà dell'arco, che comprende alla periferia concava, sottratta la metà dell'arco, che comprende alla periferia convessa.

PROBLEMI

Appartenenti al Libro III.

CLXII. Determinare la figura, in cui una serie di oggetti posti in linea retta, possano vedersi di una stessa grandezza dagli spettatori collocati a diverse distanze.

CLXIII. Presupposta la terra perfettamente sferica, date due delle tre seguenti quantità, cioè il diametro della terra, l'altezza di un monte, e la tangente condotta dalla sommità del medesimo alla superficie della terra, si potrebbe sempre ottenere la terza.

CLXIV. Far passare un circolo per tre punti dati, non situati in diretto.

LIBRO IV. D'EUCLIDE.

CLXV. Il Libro IV. d'Euclide è tutto problematico, perciò noi proponiamo i seguenti

PROBLEMI

CLXVI. Ad un dato triangolo inscrivere, e circoscrivere un circolo.

CLXVII. A qualunque figura regolare inscrivere, e circoscrivere un circolo.

CLXVIII. Ad un circolo dato inscrivere un triangolo, i di cui angoli sieno uguali agli angoli di un triangolo dato.

CLXIX. Ad un dato circolo inscrivere, o circoscrivere un quadrato.

CLXX. Sopra una data retta formare un triangolo isoscele, in cui gli angoli alla base sieno dupli dell' angolo al vertice.

CLXXI. Ad un dato circolo inscrivere, e circoscrivere un pentagono.

CLXXII. Ad un dato circolo inscrivere un esagono regolare.

CLXXIII. Tutte le figure multiple delle figure regolari, che possono inscriversi ad un circolo dato, si potranno parimente circoscrivere al medesimo.

LIBRO V. D'EUCLIDE.

Delle ragioni, e proporzioni delle quantità.

CLXXIV. Se due quantità sieno eque multiple di altre due quantità, saranno esse geometricamente proporzionali.

CLXXV. Se due quantità differiscono ugualmente da altre due, saranno aritmeticamente proporzionali.

CLXXVI. La proporzione geometrica può variarsi in più modi, persistendo la medesima proporzione.

CLXXVII. In qualunque numero di ragioni geometriche simili, la somma di tutti gli antecedenti starà alla somma di

tutti i conseguenti, come un antecedente qualunque al suo conseguente, o queste ragioni sieno semplici, o in qualunque modo composte.

CLXXVIII. In ogni progressione geometrica il primo termine sta a qualunque termine della progressione come il primo antecedente al suo conseguente, elevati a quella dignità, che esprimerà il numero de' termini, meno il primo.

CLXXIX. Se in due proporzioni gli antecedenti dell' una sieno conseguenti nell'altra, o viceversa, operando direttamente, otterremo diverse ragioni, i di cui termini saranno direttamente proporzionali.

CLXXX. Se in due proporzioni il conseguente della prima sia antecedente nell' altra, ed il secondo antecedente della prima sia conseguente nella seconda, turbando le dette ragioni, i termini saranno reciprocamente proporzionali.

CLXXXI. Se gli antecedenti di qualunque proporzione si moltiplichino per una quantità, e i conseguenti per un' altra, sebbene si turbino le ragioni, i termini resteranno tuttavia proporzionali.

PROBLEMI
Appartenenti al Libro V.

CLXXXII. Un mercante di Parma ha ricevuti 500 scudi in moneta di Genova, si ricerca quanti ne ha ricevuti di Parma.

CLXXXIII. Una colonna di marmo lunga 8. piedi, larga 3, ed alta 2, pesa 2400 libbre, quanto peserà un'altra colonna, che abbia 10 piedi di lunghezza, e 4 di larghezza?

CLXXXIV. Tre mercanti formarono società. Il primo mise 100 scudi, e perseverò per tre mesi nella società. Il secondo ne mise 15, e vi stette sei mesi; il terzo 50, e vi stette per otto mesi: guadagnarono 450 scudi. Si domanda il guadagno di ciascheduno.

LIBRO VI. D'EUCLIDE.

Della proporzione delle linee.

CLXXXV. Se in un triangolo si conducano delle paralelle ai lati, esse segheranno i lati del triangolo proporzionalmente.

CLXXXVI. Se due triangoli saranno equiangoli, i lati saranno proporzionali.

CLXXXVII. Due triangoli equilateri hanno sempre i lati proporzionali.

CLXXXVIII. I triangoli isosceli avranno similmente i lati proporzionali, purchè abbiano un angolo eguale.

CLXXXIX. Se due triangoli avranno, o tutti i lati paralelli, o tutti proporzionali, saranno parimente equiangoli.

CXC. Se due rette segheranno due, o più linee paralelle, i loro segmenti saranno proporzionali.

CXCI. Se dividerassi un angolo di un triangolo qualunque in due parti uguali, i segmenti della base saranno proporzionali ai lati.

CXCII. Se due triangoli intorno ai medesimi angoli, o intorno ad angoli, che sieno ambidue acuti, o ottusi, avessero i lati proporzionali, saranno essi similmente equiangoli.

CXCIII. Se dal vertice del triangolo rettangolo si conduca una perpendicolare alla base, essa dividerà il triangolo in due triangoli simili non solamente fra di loro, ma simili eziandio a tutto il triangolo.

CXCIV. I paralellogrammi, che hanno un angolo eguale, hanno i lati reciprocamente proporzionali.

CXCV. Se due triangoli sieno simili, le loro aree saranno nella ragion duplicata dei lati omologhi.

CXCVI. Due poligoni simili possono ridursi in ugual numero di triangoli simili, e le aree non meno dei triangoli, che dei poligoni, saranno nella ragion duplicata dei lati omologhi.

CXCVII. Se vi fosse qualunque numero di rette proporzionali, le figure, che si formeranno da esse, saranno parimente proporzionali.

CXCVIII. Se sopra i lati del triangolo rettangolo si formeranno delle figure simili, il poligono formato sopra la ipotenusa, sarà eguale ai poligoni formati sopra i due catteti.

CXCIX. Se due poligoni si inscrivano al circolo, e dai loro centri si tirino le perpendicolari alle corde, saranno detti poligoni come i quadrati dei raggi, e le periferie dei circoli nella semplice ragione dei raggi, e le superficie dei medesimi circoli, come i quadrati dei raggi.

PROBLEMI
Appartenenti al Libro VI.

CC. Date tre linee, ritrovare una quarta proporzionale.

CCI. Date due linee, ritrovare una media, o una terza proporzionale.

CCII. Dividere un angolo qualunque in due parti uguali.

CCIII. Quadrare le lunole d'Ippocrate.

CCIV. Sopra una data retta descrivere un poligono simile ad un poligono dato.

.CCV. Formare un poligono simile ad un altro poligono dato.

TRIGONOMETRIA.

CCVI. La Trigonometrìa considera la risoluzione del triangolo. Sei sono le parti, da cui esso risulta, e tutte sei vengono determinate dalla Trigonometrìa. Tutte le figure di qualunque genere, ed ordine, possono ridursi in tanti triangoli. Non vi è forse un trattato nella Matematica nè più utile, nè più semplice nello stesso tempo. Il suo uso è amplissimo in tutti i rami della medesima, ed il calcolo Trigonometrico introdotto nell' Analisi dal grand' Eulero, ha facilitato non poco le sue sublimi Teorie. Noi ne esporremo brevemente i principj.

CCVII. Come gli angoli non hanno proporzione determinata coi lati, perciò si sono introdotte nella Trigonometrìa alcune quantità indeterminate, che variino col cangiare degli angoli. Queste linee però sono determinate, determinato il raggio del circolo di cui sono parti. Per questo motivo il Problema è sempre indeterminato, purchè non si determini uno dei lati costituenti il triangolo.

CCVIII. In ogni triangolo i seni degli angoli sono come le metà dei lati, o nella semplice ragione dei lati.

CCIX. Da questo Teorema si possono risolvere tutti i Problemi, date tre delle sei parti costituenti il triangolo, purchè

esso sia rettangolo. Tolta questa ipotesi, il Problema non si può generalmente risolvere. Perciò stabiliamo il seguente Teorema.

CCX. In ogni triangolo, dati due lati, e l'angolo intercetto, sarà la somma dei lati, alla differenza dei lati, come la tangente della semi-somma, alla tangente della semi-differenza.

CCXI. In ogni triangolo, dati i tre lati, determinare gli angoli.

PROBLEMI.

CCXII. Misurare l'altezza di una montagna, stando ai piedi, o sulla cima della medesima.

CCXIII. Misurare l'altezza di una nuvola.

CCXIV. Di un pallone volante, posto immobile.

CCXV. Dalla piazza del Duomo di Parma, misurare l'altezza della sua torre, non meno che la grandezza dell'Angiolo situato sulla medesima.

CCXVI. Formare la pianta di una fortezza, a cui gli assediati non permettono d'accostarsi.

CCXVII. Costruire la carta Geografica del Parmigiano.

TERZA PARTE.

GEOMETRIA SUBLIME.

CCXVIII. L'Analisi ha perfezionata la Geometrìa, come la Geometrìa ha data all' Analisi una estensione, che sorprende. Noi siamo debitori al metodo Analitico delle principali invenzioni, di cui fu arricchita, e giornalmente si arricchisce la Geometrìa. Le invenzioni degli antichi sono pur piccole a paragone delle nostre, e presentemente il nome di Geometrìa abbraccia una estensione come infinita d'idee affatto sconosciute ai secoli trapassati; ma nel medesimo tempo la Geometrìa ha portato l'Analisi ad un grado eminente di perfezione, cui non poteva giungere, servendosi soltanto de' suoi metodi, e de' suoi principj. Noi abbiamo osservato di sopra, che l'equazioni al di là del quarto grado non si possono generalmente decomporre, nè determinarsi le radici, che le compongono. Per mezzo però della intersezione di due curve, e per la regola data dagli Analisti, si possono risolvere fino all' equazioni del duodecimo grado, e le

equazioni di qualunque ordine per una curva dello stesso ordine, e determinare le radici tutte, che le compongono. Noi però non svilupperemo tutta questa gran parte d'Analisi, e ci contenteremo di dare la costruzione geometrica delle equazioni di primo, secondo, terzo, quarto, quinto, e sesto ordine, per qualunque equazione esse si rappresentino.

Della Costruzione Geometrica dell'Equazioni di primo grado tanto determinate, che indeterminate, e delle Equazioni determinate di secondo grado.

CCXIX. Ogni equazione algebraica può costruirsi geometricamente. Se l'equazione è di primo grado, essa appartiene alla linea retta. Non vi potrà essere se non una variabile, se l'equazione sia determinata. Vi saranno però due variabili, se l'equazione suppongasi indeterminata. Lè due variabili si dicono coordinate: frequentemente però le coordinate dell'equazione sono diverse dalle coordinate della linea geometrica. Noi daremo pertanto la costruzione di questa formola $(x+A).B=(y+C).D$, a cui possono ridursi tutte l'equazioni algebraiche indeterminate del primo ordine, o le coordinate della equazione data, corrispondano esattamente, o sieno pur differenti dalle coordinate della linea geometrica.

CCXX. Le equazioni poi complete di secondo grado, e determinate, possono costruirsi risolvendole pel metodo Cardanico. Noi però ci serviremo per la costruzione di queste equazioni del metodo semplice, ed elegante del P. Rabuel.

Formole da costruirsi.

1. $a x - 2 b x = b^2$
2. $2 r x = 2 r a + a^2$
3. $R x = r x + b r$
4. $x^2 = a^2 + a x$
5. $x = \dfrac{a^2}{\sqrt{\sqrt{3 a^4}}}$
6. $a b - a x = \dfrac{a x b}{q}$
7. $a . (a - x) = x^2$
8. $x^2 - a^2 = b^2$
9. $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$
10. $x^2 = a b + c^2 - q^2$
11. $x^2 + b x = a d$
12. $x^2 - 2 b x = a c$

PROBLEMI GEOMETRICI DETERMINATI di primo grado.

CCXXI. Prolungare una data retta divisa in qualunque punto in maniera, che il quadrato della seconda parte, e dell'aggiunta, sia uguale al prodotto di tutta la linea, e l'aggiunta per la stessa aggiunta.

CCXXII. Fig. 1.ª Dato un circolo, e sopra questo data la retta *DA*, condurre dal centro del circolo alla stessa la secante *BC*, in modo, che il segmento *BR* sia sempre uguale ad *AB*.

CCXXIII. Condurre a due circoli dati una tangente.

CCXXIV. Formare sopra una data retta un triangolo isoscele, in cui ciascuno degli angoli alla base sia doppio dell'angolo al vertice.

CCXXV. Formare un triangolo equilatero, l'area del quale sia uguale ad una quantità data ex. gr. a^2 .

CCXXVI. Inscrivere ad un triangolo dato un quadrato.

CCXXVII. Dividere una data retta in media, ed estrema ragione analiticamente.

CCXXVIII. Fig. 2. Dato il quadrato $ABCQ$, e prolungato il lato BC in D, dall'angolo A ad esso opposto condurre la linea AD in modo, che la parte OD, che rimane fuori del quadrato, sia uguale ad una quantità data ex. gr. d.

SEZIONI CONICHE
ossia
EQUAZIONI INDETERMINATE
di secondo grado.

CCXXIX. Ogni equazione indeterminata di secondo grado può rappresentarsi per questa formola universale.

$$y^2 + lxy + ny + px + mx^2 + q = o$$

In questa equazione si comprende la formola universale, che risulta dalla sezione del cono

$$y^2 = \frac{sen\ A}{Cos^2 \frac{1}{2} B} (c\,x\ sen\ B - x^2\ sen\ (A + B)) .$$

Nella prima formola si contiene ancora l'ipotesi in cui le coordinate della curva si diano per le due coordinate dell'equazione.

DELLA PARABOLA.

CCXXX. Se gli angoli $A + B$ sieno di 180 gradi, essendo questi due angoli interni, ed opposti alle medesime parti, la sezione del cono sarà paralella ad uno dei lati, e la curva, che nascerà da questa sezione si dice Parabola Apolloniana. In questa ipotesi noi dimostreremo, che $m - \frac{l^2}{4}$ sarà $= o$; e l'equazione $y^2 + l\,x\,y + m\,x^2$ sarà un quadrato perfettissimo, che potrà risolversi in due fattori perfettamente uguali. Fatte le debite, ed opportune sostituzioni, noi giungeremo a questa formola semplicissima $y^2 = p\,x$; e quindi dimostreremo le seguenti proprietà.

CCXXXI. Se due linee si taglino nella parabola, i rettangoli dei due segmenti saranno uguali ai rettangoli delle ascisse moltiplicate per una quantità costante, o pel suo parametro.

CCXXXII. Il parametro della parabola è terzo proporzionale geometrico fra l'ascissa, e l'ordinata.

CCXXXIII. Se nella parabola si prenda un'ascissa $= \frac{p}{4}$, in quel punto esisterà il foco della medesima, e la doppia ordinata, che passerà per quel punto, sarà uguale al parametro.

CCXXXIV. Direttrice della parabola dicesi quella linea paralella alla ordinata, che passa pel foco, e dista dal vertice di $\frac{1}{4}$ del suo parametro.

CCXXXV. Se dal foco si conduca una qualunque linea alla parabola, e da quel medesimo punto s'innalzi una perpendicolare alla direttrice, queste due linee saranno uguali.

CCXXXVI. Data l'equazione della parabola, determinare i valori analitici della

1. Tangente,
2. Sottangente,
3. Normale,
4. Sunnormale.

CCXXXVII. Determinare il valore della intercetta fra il vertice della curva data, ed il punto della sottangente.

DELL' ELLISSE.

CCXXXVIII. Se gli angoli $A + B$ si suppongano minori di due retti, la curva sarà un'ellisse. In questa ipotesi sarà $m - \frac{l^2}{4}$ positivo, e la equazione $y^2 + l\,x\,y + m\,x^2$ non si può risolvere in due fattori reali. Fatte le opportune sostituzioni, noi otterremo per equazione all' ellisse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2\,a\,x - x^2)$. Se x maggiore di $2\,a$ la curva sarà immaginaria, e quindi la curva comprende uno spazio finito.

CCXXXIX. Se due linee si seghino nell' ellisse, saranno i rettangoli formati dai loro segmenti nella ragione dei quadrati del semi-asse minore, e del semi-asse maggiore.

CCXL. Se $b = a$ l'ellisse diventa circolo.

CCXLI. Se dal centro dell' ellisse si descriva un circolo coll' asse maggiore, le ordinate del circolo, e dell'ellisse saranno nella semplice ragione degli assi.

CCXLII. Se le ascisse si prendano dal centro, avremo per equazione all' elisse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ E se x maggiore di a, la curva sarà immaginaria.

CCXLIII. Se si prenda una terza proporzionale fra l'asse maggiore, ed il minore, in quel punto si troverà il foco dell'ellisse, e la linea che passerà per esso si chiama parametro dell'ellisse. Sostituito questo valore nell' equazioni avremo queste altre due formole universali $y^2 = p\,x + \frac{p\,x^2}{2\,a}$ prese le ascisse dal vertice; prese però dal centro, l'equazione sarà

$$y^2 = \frac{p\,a^2 - p\,x^2}{2\,a} = \frac{p}{2\,a}\,(a^2 - x^2)$$

per cui si possono similmente dimostrare tutte le proprietà dell' ellisse.

CCXLIV. Determinar nell' ellisse l'espressioni analitiche della

1. Tangente,
2. Sottangente,
3. Normale,
4. Sunnormale.

DELL' IPERBOLA.

CCXLV. Nella Iperbola gli angoli $A + B$ sono maggiori di due retti, ed il seno di essi per conseguenza negativo. Il valore di $m - \frac{l^2}{4}$ sarà similmente negativo, e la formola $y^2 + l\,x\,y + m\,x^2$ si potrà sempre risolvere in due fattori reali, ma però non uguali. Ed ecco le proprietà principali, che distinguono la natura diversa di queste curve. Fatta questa ipotesi, e le debite sostituzioni, otterremo per equazione all' iperbola

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(2\,a\,x + x^2)$$

computandosi le ascisse dal vertice: computandosi però dal centro, otterremo $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2)$.

CCXLVI. Se sia x minore di a, oppure negativa, la quantità y sarà immaginaria, o l'ascisse si prendano dal centro, oppure dal vertice. Ma se x maggiore di a la curva sarà reale, e saranno quattro i rami, che la comprendono, i quali si estenderanno all'infinito.

CCXLVII. In ogni iperbola non equilatera il rettangolo della somma dell'ascissa, e dell'asse maggiore nella medesima ascissa è al quadrato della ordinata, come il quadrato del semi-asse maggiore al quadrato del semi-asse minore. Se però sieno uguali gli assi, e la iperbola equilatera per conseguenza, detti rettangoli sono uguali, come pure si dimostra nel circolo.

CCXLVIII. Se le ascisse si computino dal centro, il rettangolo della somma del semi-asse maggiore, e dell'ascissa nella differenza dell'ascissa, e del semi-asse maggiore sta al quadrato della ordinata nella stessa ragione dei quadrati dei due semi-assi.

CCXLIX. La somma dei quadrati dell'ordinata, e del semi-asse minore sta al quadrato dell'ascissa, come il quadrato del semi-asse minore al quadrato del semi-asse maggiore.

CCL. Se prendasi una terza proporzionale fra i due assi, in quel punto si troverà il foco, e la retta che passerà pel medesimo dicesi parametro dell'iperbola.

CCLI. Determinare nella iperbola l'espressione analitica della

1. Tangente,
2. Sottangente,
3. Normale,
4. Sunnormale.

CCLII. Assintoti dell' iperbola si dicono quelle rette, che tirate dal centro sempre l'abbracciano, nè mai si confondono con essa, che ad una distanza infinita.

CCLIII. I rettangoli delle ordinate nelle loro corrispondenti ascisse sono uguali al prodotto dei due semi-assi dell' iperbola, e tra loro per conseguenza uguali. Quindi l'equazione riferita alla iperbola fra gli assintoti è $x y = a b$, e posta l'iperbola equilatera, $x y = a^2$. Se $y = o$ l'ascissa diviene infinita.

Della costruzione dell' Equazioni indeterminate di secondo grado.

CCLIV. Ogni equazione indeterminata di secondo grado può costruirsi per mezzo di una delle sezioni del cono. Noi daremo pertanto la costruzione delle seguenti formole, e di qualunque altra, che ci si proponga, o le coordinate dell'equazione data corrispondano alle coordinate della curva, o sieno diverse, purchè la loro differenza sia costante.

Formole da costruirsi.

1. $y^2 = a c + c x$
2. $y^2 - 2 a y + 2 x y = a^2 + 4 a x - x^2$
3. $x^2 + 2 r x = - y^2$
4. $y^2 + 2 b y = x (2 r - x) - b^2$
5. $y^2 + 2 b y = - \frac{b^2 x^2}{a^2}$
6. $a^2 y^2 - 2 a c y = b^2 x (2 a - x) - c^2$
7. $x^2 - 2 c x = \frac{c^2 y^2}{q^2} - 2 c^2$

8. $x^2 + ax = 2y^2 - 2by$
9. $byx + 2ax - q = 0$
10 $xy + ax + by + ab - a^2 = 0$

PROBLEMI GEOMETRICI
di secondo grado,
appartenenti alle sezioni coniche.

CCLV. Fig. 3*a* Date le rette di posizione AB, ed AC, che formino un angolo qualunque, trovare il punto M tale, che tirata la linea MC al punto fisso C, ed MB paralella ad AC prolungata sino alla retta AB, sia sempre $BM : MC :: b : c$. Da questo Problema risultano le medesime equazioni, che si ottengono dalle diverse sezioni del cono.

CCLVI. Fig. 3*a* Dati in una linea indefinita i punti Q, e C, e fuor di essa il punto M, tirare dai due punti dati al punto M le rette CM, QM, le quali abbiano il rapporto di $m : n$.

CCLVII. Fig. 3. Data la linea indefinita QH, e fuor di essa il punto C variabile, determinare la curva, che passa per i centri degl'infiniti circoli, che passeranno pel detto punto C, e taglieranno la retta QH nei punti A, e B in maniera, che la linea AB sia corda comune a tutti i circoli.

CCLVIII. Condurre dal centro di un circolo dato alla tangente infinite secanti in modo, che l'intercetta fra il circolo, e la tangente sia uguale ad una quantità variabile.

CCLIX. Fig. 4. Se dentro dell'angolo AEB diasi un punto, per esempio n, determinare la curva MOF, la quale passando

per il punto n abbia questa proprietà, che condotte infinite secanti, che passino anch' esse pel punto dato n, sia sempre $A q = n B$.

Della costruzione geometrica dell'Equazioni superiori.

CCLX. Ogni equazione di terzo, e quarto grado può costruirsi per due delle sezioni del cono. Noi siamo debitori di questo metodo, origine, e principio di tanti avvanzamenti dell' Uomo, al gran Cartesio. Tante saranno le intersezioni delle due curve, quante sono le radici reali, che formano l'equazione. Similmente per mezzo della intersezione di due curve si può ottenere la risoluzione delle equazioni di quinto, e sesto grado. Noi proponiamo le seguenti formole da costruirsi, e determineremo le loro radici prevalendoci di questo metodo.

Formole di terzo, e quarto grado.

$$x^3 = a^2 b$$
$$x^3 + a b x - a f^2 = o$$
$$x^3 + a x^2 + a x b - a b f = o$$
$$x^4 + f g x^2 + f^2 b x - f^3 c = o$$
$$x^4 + b x^2 + c x - g = o$$
$$x^4 - a^2 x^2 - 2 a^4 = o$$

Formole di quinto, e sesto grado.

$$x^5 - 2 a^2 x^3 + a^4 x - a^4 b = o$$
$$x^6 + a x^5 + b x^4 + c x^3 + d x^2 + e x + f = o.$$

PROBLEMI GEOMETRICI di terzo grado.

CCLXI. Dividere un angolo ottuso, o acuto in tre parti uguali.

CCLXII. Ritrovare due medie proporzionali fra due qualunque date quantità.

PROBLEMI GEOMETRICI de' gradi superiori.

CCLXIII. Fig. 5. Supposto che nell'angolo QMs i due lati disuguali QM, ed Ms si possano muovere intorno al punto M, in maniera che il punto Q del lato maggiore si aggiri intorno a sè stesso, e il punto s dell'altro lato possa scorrere sulla retta QP, che passa pel punto Q, e fatta poi la retta $Ms = 2Rs$, si cerca qual curva descriverà il punto $2R$, movendosi il punto s per la retta QP.

CCLXIV. Fig. 5. Se intorno alla data retta RP si rivolga la norma ABD in modo, che i lati della medesima passino per i punti dati A, e D, si cerca la curva, che descriverà il punto O preso ad arbitrio sul lato della norma, DB, o prolungato, o diminuito.

CCLXV. Fig. 6. Data la linea CA di posizione, e condotta ad essa una perpendicolare OQ, si vuol sapere qual curva descriverà il punto O nel suo movimento, in modo, che sia sempre $Or = Bq$.

CALCOLO DIFFERENZIALE.

CCLXVI. Gli antichi Geometri, quando vollero far passaggio dal rettilineo al curvilineo, non trovarono miglior compenso, che il considerare, ed introdurre nel calcolo le quantità, che avessero alle quantità finite una minor ragione di qualunque data. Il loro metodo però era così lungo, complicato, e fastidioso, che sembrava ugualmente difficile il dare la dimostrazione, che il comprendere le dimostrazioni già fatte. Perciò si desiderava dai Geometri un metodo, che vie più agevolasse la strada, e rendesse meno complicate, e difficili le dimostrazioni. Il P. Bonaventura Cavallieri fu il primo, che tentasse una sì difficile impresa. Il suo metodo degl' indivisibili fu abbracciato, e perfezionato dai Geometri, che fiorirono dipoi, e costantemente seguìto fino a tanto che comparvero i due sommi Geometri Newton, e Leibnizio. Il metodo di questi due sommi Geometri, sebbene da alcuni criticato come soggetto ad errore, è appoggiato a due principj sommamente evidenti, e dipendenti ambedue dalla teoria delle serie. Se una quantità si avvicini senza alcun limite ad una quantità qualunque, nello stesso limite ogni differenza svanisce, e divengono pure uguali le due quantità. Di questo principio si servirono gli antichi per condurre le tangenti, e per congiungere il moto rettilineo col curvilineo. Pur nondimeno questo solo principio non basta. Se due quantità si svolgano in serie, quantunque in quel termine della serie, in cui le quantità divengono minime, ogni differenza svanisca per rispetto alle quantità finite, non però svanisce la differenza, che tra quelle

minime quantità sussiste: anzi quantunque minime conservano la stessa identica ragione, che avevano fra di loro le quantità finite; e quindi ogni equazione finita conserva la stessa ragione, sebbene le quantità continuamente fluiscano, e si computino soltanto le differenze minime delle medesime.

CCLXVII. Differenziare pertanto altro non è, che il dividere le quantità pe' suoi ultimi elementi, ed il Calcolo differenziale può dirsi a ragione un metodo abbreviato delle serie. Noi differenzieremo qualunque quantità, che ci si proponga, semplice essa sia, o composta, intiera, o frazionaria, o elevata a qualunque dignità, o l'esponente sia numero intiero, e determinato, o frazionario, ed indeterminato.

CCLXVIII. Similmente daremo la differenza di qualunque quantità complessa contenente qualunque numero di variabili moltiplicate, o divise le une per le altre, ed elevate a qualunque esponente intiero, o frazionario, purchè sordo, e irrazionale esso non sia. Per ciò proponiamo alcune formole, lasciando ad arbitrio di chi che sia il proporne delle altre a piacimento.

Formole da differenziarsi.

1. $y^m = a^m x^{m-1} + x^{m-2}$
2. $y^3 = x^3 - 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x$
3. $\sqrt[m]{a^2 + y^2}$
4. $\sqrt{a^2\,b\,y\,\sqrt{a^2 + y}}$
5. $x\,y$
6. $\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt[3]{x - a}$
7. $z^2 \cdot \sqrt{a^2\,b^2 + y^2}$

8. $\frac{z}{y}$

9. $\frac{x}{\sqrt{y^2 + a^2}}$

10. $\frac{z . \sqrt{a^2 + 2\, a\, x}}{\sqrt{b^2 + y^2}}$

11 $z\, y\, x$

12 $\sqrt{y^3 + \sqrt{a^4 + x^4}} + 3\, x\, y$

13. $\frac{x\, y \sqrt{x^3 - a^2}}{\sqrt{y^2 - x^2}}$

14. $\frac{\sqrt{\overline{a + 2\, x}^3}}{3} + \frac{\sqrt{z^{-3}}}{6} - \frac{\sqrt{a\, z}}{2}$

Degli usi principali del Calcolo Differenziale.

Metodo diretto delle Tangenti.

CCLXIX. Qualunque sia la curva data o algebraica, o trascendente, noi dimostreremo l'espressione analitica delle seguenti linee.

Sottangente $\frac{y\, d\, x}{d\, y}$

Tangente $\frac{y\, d\, s}{d\, y}$

Sunnormale $\frac{y\, d\, y}{d\, x}$

Normale $\frac{y\, d\, s}{d\, x}$

PROBLEMI

CCLXX. Data l'equazione alla parabola, determinare l'espressione finita della Tangente, Sottangente, Normale, e Sunnormale.

CCLXXI. Definire le stesse proprietà nell' Ellisse.

CCLXXII. Nell' Iperbola.

CCLXXIII. Nel Circolo.

CCLXXIV. Data l'equazione finita $a^m x^n = y^{m+n}$, che appartiene ad infinite parabole, se la quantità n si supponga positiva, e se negativa ad infinite iperbole fra gli assintoti, definire le proprietà delle Tangenti, Sottangenti, Normali, e Sunnormali.

CCLXXV. Data l'equazione alla logaritmica $dx = \frac{c\,dy}{y}$ ritrovar la Tangente, Sottangente, Normale, e Sunnormale.

CCLXXVI. Le stesse proprietà dimostreremo nella Tractoria, la di cui equazione è $dx = -dy \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$.

CCLXXVII. Nella Cicloide $dy = dx \frac{\sqrt{2a - x}}{\sqrt{x}}$

CCLXXVIII. Nella curva dei seni, e cosseni circolari

$$dx = \pm \frac{r\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

in cui dx esprime l'arco del circolo, y il seno di detto arco, se si prenda il segno positivo; ma se vaglia il segno negativo, la quantità y esprimerà il cosseno.

CCLXXIX. Lo stesso dimostreremo nella curva dei seni, e cosseni iperbolici: $dx = \frac{r\,dy}{\sqrt{y^2 \pm r}}$, in cui x rappresenta l'arco iperbolico, y il seno, se prendasi il segno positivo, o il cosseno, se vaglia il segno negativo.

Metodo dei Massimi, e dei Minimi.

CCLXXX. Pel metodo dei Massimi e dei Minimi si determinano tutte le inflessioni dei corpi, che si muovono per le curve, e tutto l'andamento delle medesime. Se $dx = o$, la tangente sarà paralella alle ordinate: se $dy = o$, la tangente sarà paralella alle ascisse. Ma ciò solo non basta per definire, se la curva in quel punto abbia un massimo, o un minimo, ovvero nè l'uno, nè l'altro. Se però la curva fosse dotata di un massimo, o di un minimo, posta la tangente paralella alle ascisse, o alle ordinate, in quel punto si avrà necessariamente, o un massimo, o un minimo.

PROBLEMI

CCLXXXI Determinare la massima, o la minima ordinata nel Circolo.

CCLXXXII. Nella Parabola.

CCLXXXIII. Nell' Ellisse.

CCLXXXIV. Nell' Iperbola.

CCLXXXV. Determinare se la curva, la di cui equazione è $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{y}{a}$ abbia un massimo, o un minimo.

CCLXXXVI. Determinare le stesse proprietà nella curva, la di cui equazione sia $x^2 (a - x) = a y^2$.

CCLXXXVII. Si determinerà parimente in tutte le curve, di cui diasi l'equazione, se abbiano, o un massimo, o un minimo.

PROBLEMI GEOMETRICI
Appartenenti ai Massimi, ed ai Minimi.

CCLXXXVIII. Fig. 7. Dividere la data linea AB in un punto D, in maniera che il rettangolo ADB sia il massimo di tutti.

CCLXXXIX. Inscrivere dentro di un dato circolo un triangolo, che sia il massimo di tutti i triangoli, che vi si possano inscrivere.

CCXC. Circoscrivere ad un circolo dato un triangolo, che sia il minimo di tutti i triangoli, che vi si possano circoscrivere.

CCXCI. Inscrivere ad una data sfera un cono, la di cui superficie, omessa la base, sia la massima di tutte.

CALCOLO INTEGRALE.

CCXCII. Se avessimo un metodo universale per sommare le serie, come l'abbiamo per ridurre in serie le quantità, il calcolo integrale, o sommatorio non presenterebbe maggiori difficoltà, che il calcolo differenziale. Tutte le formole, che non contengono se non una, o due variabili, sono integrabili, o algebraicamente, o presupposta la quadratura, o rettificazione di qualche curva. E pure ci manca il metodo frequentemente per

integrarle. Perciò noi integreremo soltanto quelle formole, che esattamente corrispondono ai criterj d'integrabilità. Se la quantità (posta una sola variabile), per cui si moltiplica, o dividesi il differenziale, uguagli il differenziale medesimo, quantunque sieno diversi gli esponenti, la quantità sarà sempre integrabile.

CCXCIII. Noi daremo l'integrazione di tutte queste formole, e proporremo ancor alcuni esempj di quelle, che possono facilmente ridursi, prevalendoci di alcune industrie analitiche.

Formole da integrarsi:

1. $x^m\,dx$

2. $\frac{3}{2}.\,dz.\sqrt{a+z}$

3. $x^2\,dx\sqrt{a^2-b^2+x^3}$

4. $\dfrac{2\,x\,dx+3\,b\,x^2\,dx}{2\sqrt{a^2+b\,x^3+x^2}}$

5. $\dfrac{m\,x^{m-1}\,dx.\sqrt{a^2+x^2}+x\,dx}{n\sqrt{a^2+x^2}.\sqrt[n]{\overline{x^m+\sqrt{a^2+x^2}}^{\,n-1}}}$

6. $\dfrac{2\,y\,dy+n\,y^{n-1}\,dy}{m\sqrt[m]{\overline{a^2+y^2+y^n}^{\,m-1}}}$

7. $dy\,(a+y)^p$

8. $dz\,(a+z)^m.\,(a+z)^n.\,(a+z)^s$

Formole riducibili

1. $dy\sqrt{a^4+4a^3y+6a^2y^2+4ay^3+y^4}$
2. $dx\sqrt{x\sqrt{a^2x^2+x^4}}$
3. $(3ax^3dx+4x^4dx).\sqrt{ax+x^2}$
4. $\dfrac{adx+xdx}{\sqrt{3a+2x}}$
5. $dx\,(x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4).(a+x)^r$
6. $zdz.\overline{a+z}^q$

CCXCIV. Oltre le formole, che sono riducibili al criterio d'integrabilità, ve ne sono delle altre, che sebbene non corrispondano, pure sono integrabili. Qualunque formola, il di cui differenziale è moltiplicato per due funzioni ineguali della variabile, può sempre integrarsi, svolgendosi in serie il binomio, o trinomio, purchè l'esponente di questa funzione ineguale sia intiero, e positivo.

Formole.

1. $x^2dx.(a+x)^3$
2. $z^4dz.(a-z)^n$
3. $y^rdy.(a^2+y^2)^m$
4. $z^qdz.(a^n-z^n)^r$

Del metodo delle sostituzioni per integrare molte formole differenziali.

CCXCV. Il metodo delle sostituzioni è il metodo dei Matematici. Noi convertiamo per esso le formole, di cui non consta l'integrazione, in altre formole, di cui abbiamo il metodo per integrarle. Non abbiamo però una regola certa, ed universale per conoscere quale sostituzione debba farsi, acciocchè una formola non integrabile si converta in un'altra, di cui consti l'integrazione. Noi illustreremo questo metodo proponendo alcune formole, di cui pel metodo delle sostituzioni si può ottenere l'integrazione.

Formole.

1. $\dfrac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}\cdot\sqrt{a + \sqrt{2ax + x^2}}}$

2. $\dfrac{-a^2\,dx}{\overline{x - a^2}^{\frac{3}{2}}}$

3. $x^2\,dx\,\overline{a + x}^{\frac{3}{2}}$

4. $x^m\,dx\,.\,\overline{a^2 + x^2}^{\frac{1}{2}}$ (se $\frac{m-1}{2}$ sia intiero, e positivo)

5. $x^m\,dx\,.\,\overline{a + x}^{p}$ (se m sia intiero, e positivo)

6. $x^m\,dx\,.\,\overline{a^n + x^n}^{p}$ (se $\frac{m-n+1}{n}$ sia intiero, e positivo)

Della integrazione generale dell'equazioni differenziali a due o tre variabili.

CCXCVI. Tutte l'equazioni differenziali a due variabili sono integrabili se $\frac{d^{II} M}{d y} = \frac{d^{I} N}{d x}$, in cui le quantità M, ed N possono esprimere qualunque funzione d'x, e d'y. Noi integreremo pertanto qualunque equazione differenziale, che ci si proponga, purchè regga in essa l'equazione di condizione. Il numero di queste vie più s'accresce, accresciuto il numero delle variabili. Pur non di meno il principio non è universale. Infinite sono l'equazioni, che sebbene integrabili, non presentano tuttavìa le condizioni richieste; anzi l'equazioni differenziali a tre variabili neppure sono tutte riducibili, nè si possono verificare in esse tutte l'equazioni di condizione. L'equazioni poi differenziali a due variabili, sebbene sieno tutte riducibili, e possino integrarsi moltiplicate, o divise per qualche fattore, che le renda integrabili, è tuttavìa forse più difficile il ritrovare direttamente questo fattore, che integrare l'equazione medesima. Per questo motivo si sono inventati dagli Analisti molti metodi per l'integrazione di queste formole, dipendenti però tutti da circostanze particolari. Noi proporremo il più semplice. Presentemente integreremo soltanto alcune formole a due, o tre variabili, in cui si ottengono le condizioni richieste, come pure alcune altre, le quali soltanto, moltiplicate, o divise per qualche fattore, possono rendersi integrabili.

Esempj.

1. $x\,dy + y\,dx$
2. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + 2\,x^2 y\,dy$
3. $y^2\,dx + 2\,xy\,dy + 2\,by\,dy$
4. $-\dfrac{xy\,dy - a^2\,dx + y^2\,dx}{x^2\sqrt{a^2 - y^2}}$
5. $zx\,dy + yz\,dx + xy\,dz$
6. $\dfrac{zy\,dx + xz\,dy - xy\,dz}{z^2}$
7. $\dfrac{xy\,dy + xz\,dz - dx\,y^2 - dx\,z^2}{x^2\sqrt{y^2 + z^2}}$
8. $\dfrac{2\,x\,dx + 2\,my\,dy\sqrt[m]{\overline{a^2 + x^2}^{\,m-1}}}{m}.$
9. $\overline{2\,x^2 y - y^3}\,.\,dx + \overline{x^3 - 2\,xy^2}\,.\,dy = o$
10. $(2\,x^{\frac{1}{3}}y + y^{\frac{4}{3}})\,.\,dx + (x^{\frac{4}{3}} + 2\,xy^{\frac{1}{3}})\,dy = o$

Degli usi principali del Calcolo Integrale.

Metodo inverso delle Tangenti.

CCXCVII. In quella guisa, che data qualunque curva si possono definire le proprietà delle Tangenti, e di tutte quelle linee,

che da esse dipendono, servendoci solamente del Calcolo Differenziale; così pure pel Calcolo Integrale, data la proprietà di queste linee, si può determinare la curva, risolvendo il problema inverso. Noi ci serviremo delle formole sopra esposte per la soluzione di alcuni

PROBLEMI.

CCXCVIII. Trovare la curva riferita all'asse, la di cui sunnormale sia costante.

CCXCIX. Trovare la curva, in cui la somma, o la differenza della sunnormale, e dell'ascissa sia costante.

CCC. Trovare la curva, la di cui normale sia costante.

CCCI. Determinare la curva, in cui la sunnormale stia alla sottangente, come l'ascissa ad una quantità costante.

CCCII. Si cerca la curva, la di cui sottangente sia all'ascissa come $m : n$.

CCCIII. Trovare la curva, la di cui sottangente sottratta, o moltiplicata per l'ascissa eguagli il quadrato di una costante.

CCCIV. Ritrovare la curva, in cui la tangente sia paralella ad una corda qualunque data.

CCCV. Definire la curva, la di cui sottangente sia dupla dell'ascissa.

Quadratura delle Curve.

CCCVI. Data qualunqne curva, le di cui coordinate ortogonali sieno x, ed y, noi dimostreremo, che la formola esprimente

qualunque elemento dell' area sarà $y\, d\, x$, e tutta l'area sarà $S\, y\, d\, x$. Dall' uso di queste formole dipende tutta la teorìa della quadratura delle curve. Perciò proponiamo i seguenti

PROBLEMI.

CCCVII. Quadrare la parabola Apolloniana.

CCCVIII. Quadrare qualunque parabola di qualunque ordine.

CCCIX. Quadrare tutte le Paraboloidi espresse per questa equazione $y^2 = a\,x + b\,x^2 + c\,x^3 + d\,x^4$ ecc.

CCCX. Dare le quadrature di tutte le iperbole fra gli assintoti di tutti gli ordini, rappresentate per questa equazione ecumenica $x^m\, y^n = a^{m+n}$

CCCXI. Dell' Iperbola del Circolo, e dell' Ellisse non può ottenersi la quadratura. Noi lo dimostreremo.

CCCXII. Determinar quelle formole, per cui si può avere l' area del Circolo, dell' Ellisse, e dell' Iperbola.

CCCXIII. Ridurre a serie tutte quelle formole esprimenti l'aree circolari, ellittiche, ed iperboliche, per cui si può almeno per approssimazione ottenere la lor quadratura.

CCCXIV. Dare la quadratura del Circolo per mezzo della Cicloide, e definire l' equazione di questa curva dipendente dall' arco circolare.

CALCOLO LOGARITMICO.

CCCXV. La formola Ecumenica $x^m\, d\, x$ è sempre algebraicamente integrabile, purchè l' esponente m non sia uguale

$a - 1$. In questa ipotesi la formola dipende dalla quadratura dell' Iperbola Apolloniana fra gli assintoti, e può integrarsi per mezzo della logaritmica. Il Calcolo logaritmico è d'un uso grandissimo in tutte le parti della Matematica, e le formole tutte, nelle quali la differenza della variabile si moltiplica, e divide per una funzione razionale della stessa variabile, si può sempre integrare per mezzo dei logaritmi. Noi proponiamo alcune formole da differenziarsi, ed integrarsi per mezzo dei logaritmi.

Formole da differenziarsi.

1. $l \pm x$
2. $-l\,x$
3. $l\,a + l\,x$
4. $\sqrt{a^2 - l\,x^3}$
5. $x^m\,l\,x$
6. $\dfrac{l\,x^{m+1}}{m+1}$
7. $y\,l\,x$
8. $y^m\,l\,y^n$
9. $log.\ log.\ x$
10. $log.\ log.\ log.\ x$
11. $log.^n\ x$
12. $log.\ (a^2 + x^2)$
13. $2\,l\,x - l\,y = \frac{1}{2}\,l\,\sqrt{x^2 + y} + l\,a$

Formole da integrarsi.

1. $\dfrac{c\,d\,x}{x}$

2. $\dfrac{-\,c\,l\,x\,d\,x}{x\sqrt{a^2 - l\,x^2}}$

3. $m\,l\,x^{m-1}.\dfrac{c\,d\,x}{x}$

4. $(l\,x)^m.\dfrac{c\,d\,x}{x}$

5. $\dfrac{c^2\,d\,x}{x\,.\,l\,x}$

6. $\dfrac{c^3\,d\,x}{x\,.\,l\,x\,.\,l^2\,x}$

7. $\dfrac{c^n\,d\,x}{x\,.\,l\,x\,.\,l^2\,x\ldots l^{n-1}\,x}$

8. $\dfrac{d\,x}{x+a}$

9. $\dfrac{x^3\,d\,x}{x+a}$

10. $\dfrac{d\,x}{x^2.(a+x)}$

11. $\dfrac{x^4\,d\,x}{\overline{x+a}^{\,3}}$

12. $\dfrac{x^n\,d\,x}{\overline{x+a}^{\,m}}$

CALCOLO ESPONENZIALE.

CCCXVI. Ogni quantità algebraica può rappresentarsi per i logaritmi; ma non ogni quantità logaritmica può rappresentarsi per una quantità algebraica. Si può tuttavìa passare sempre dalle quantità logaritmiche alle numeriche, e dai numeri ai logaritmi. Se passando dai logaritmi ai numeri gli esponenti delle quantità non sieno nè sordi, nè variabili, le quantità saranno sempre algebraiche; eccettuata però questa sola ipotesi le quantità diconsi esponenziali. Noi distinguiamo tre ipotesi, e di tutte tre proporremo alcune formole da differenziarsi non meno che da integrarsi.

Formole da differenziarsi.

Della prima ipotesi.

1. $\overline{a^2 + x^2}^{\sqrt{2}} = y$
2. $\overline{a - x}^{\sqrt{3}} = y$
3. $\overline{a^2\, b^2\, x^2}^{\sqrt{6}} = y$

Della seconda ipotesi.

1. $a^y = z$
2. $\overline{a^2 + b^2}^{x} = y$
3. $a\, m^x = y$
4. $\frac{a^y}{b} = u$

Della terza ipotesi.

1. $x^z = y$

2. $\overline{x^2 + a^2 z^2}^{\,y} = u$

3. $\overline{a^2 + x^2}^{\,y} = z$

4. $\overline{a z b^2 x^2}^{\,u} = y$

5. $\overline{\sqrt{a^2 + x^2}}^{\,z} = u$

Formole da integrarsi
di tutte tre le ipotesi.

1. $\overline{a b x}^{\sqrt{7}} . \sqrt{7} . \frac{c d x}{x} = d y$

2. $2 \sqrt{5} . \frac{y d y}{a + y^2} . \overline{a^2 + y^2}^{\sqrt{5}} = d x$

3. $l (a^2 + b^2) . \overline{a^2 + b^2}^{\,y} . d y = d z$

4. $\frac{a^y}{b} . d y = d z$

5. $\frac{x^y . (x d y l x + c y d x)}{c x} = d z$

6. $\frac{a x^y}{b} \big(\frac{c y d x + x l x . d y) . (l a - l b)}{c x} = d y$

Dell' uso della quadratura delle Curve per l'integrazione di alcune formole, che non sono algebraicamente integrabili.

CCCXVII. La maggior parte dell' equazioni differenziali è solamente integrabile supposta la quadratura di qualche curva; si deve però procurare per quanto sia possibile di ridurre le formole alla quadratura delle curve più semplici. Fra queste occupano il primo luogo le sezioni coniche. Noi daremo le formole, che dipendono dalla quadratura del Circolo e dell' Iperbola, e le formole tutte dipendenti dall' arco circolare. Il metodo non manca ancorchè la quantità sommatoria contenga due, o più segni sommatorj; e si esprime per questa formola $S\,dz\,S\,y\,dx$. ec.

Formole dipendenti dalla quadratura del Circolo, e dell' Iperbola.

Il segno superiore esprime l' Iperbola, l' inferiore il Circolo.

1. $dx\sqrt{2rx \pm x^2}$

2. $dx\sqrt{r^2 \pm x^2}$

Formole dipendenti dall' arco circolare.

1. $\dfrac{r\,dx}{\sqrt{2rx - x^2}}$

2. $\dfrac{-r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

3. $\frac{r\,d\,y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$

4. $\frac{r^2\,d\,t}{r^2 + t^2}$

5. $\frac{r^2\,d\,s}{s\sqrt{s^2 - a^2}}$

Formole dipendenti dalla quadratura delle Curve.

1. $\frac{d\,x\sqrt{x}}{\sqrt{a - x}}$

2. $\frac{-x^3\,d\,x}{\overline{x^2 + a^2}^{\frac{3}{2}}}$

3. $\frac{d\,x}{a^2 + x^3}$

4. $\frac{-a^3\,d\,x\sqrt{a^2 - x^2}}{x^3}$

5. $S\,\overline{a + x}\,.\,d\,x\,S\,d\,x$

6. $S\,\overline{a^2 + x^2}\,.\,\frac{d\,x\,S\,d\,x}{a + x}$

Della rettificazione delle Curve, e del loro uso nell' integrazione di alcune formole differenziali.

CCCXVIII. Data qualunque curva, le di cui coordinate sieno ortogonali, si può esprimere ogni elemento dell' arco per questa formola $d\,s\sqrt{d\,y^2 + d\,x^2}$, e la somma di tutti gli elementi dell' arco finito per quest' altra $S = S\sqrt{d\,y^2 + d\,x^2}$. Noi proporremo alcuni Problemi, e faremo vedere l' uso di queste formole per l' integrazione di alcune equazioni, che non possono integrarsi algebraicamente.

PROBLEMI.

CCCXIX. Rettificare la parabola Apolloniana.

CCCXX. Rettificare l'arco della seconda parabola cubica, la di cui equazione è $a x^2 = y^3$.

CCCXXI. Rettificare un arco dato dell'Ellisse.

CCCXXII. Rettificare la spirale Archimedea, la di cui equazione è $dx = \frac{4 \omega\, dy\, dy}{r^2}$.

Formole dipendenti dalla rettificazione delle Curve.

1. $\frac{dx\sqrt{4x^2 + a^2}}{a}$

2. $\frac{dx\sqrt{q^2 x^{2q-2} + a^{2q-2}}}{a^{q-1}}$

3. $dx\sqrt{\frac{x}{a} + \frac{b}{a} + \frac{x^3}{a^2 c}}$

4. $\frac{a\, dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$

Della separazione delle variabili nell'equazioni omogenee.

CCCXXIII. Uno dei metodi più universali per la separazione delle variabili fu proposto dal Sig.r Gabriele Manfredi *nel tomo* 18 *del Diario Italiano*. Tutte le equazioni omogenee, o in cui la somma degli esponenti in tutti i termini è interamente co-

stante, sono soggette al suo metodo, e possono integrarsi algebraicamente, o per mezzo dei logaritmi. Questo metodo non vien meno nell'equazioni degli ordini superiori, e può estendersi ancora a molte equazioni, che sebbene non omogenee, possono con non difficile artifizio in omogenee convertirsi. Noi proponiamo alcuni

Esempj

1. $x^2 dy - y^2 dx + yx dx = 0$
2. $x^m dx + y^n x^{m-n} dx - y^m dx = 0$
3. $dy \sqrt{x^2 + y^2} - y dy = 0$

Del metodo di cubare i solidi,
che si formano dalla rotazione delle superficie,
e di quadrare le superficie generate
dalla rotazione delle curve.

CCCXXIV. Finora abbiamo esposte le formole, ed il metodo per definire le superficie di qualunque figura curvilinea essa sia, o rettilinea. Le formole ecumeniche non sono molto diverse, onde determinare la solidità delle curve, la quale si ottiene per il movimento della superficie. Se un piano qualunque, e di qualunque figura si muova circolarmente, si otterrà un solido, la di cui natura dipenderà da questa formola ecumenica $\frac{p}{2r} S x^2 dy$, o da quest' altra $\frac{p}{2r} S y^2 dx$. Se poi la sottangente della curva fosse data, ci serviremo di questa terza formola $\frac{p}{2r} S t x dx$, in cui la quantità t esprime la sottangente. Le formole poi, che esprimono le superficie, che si formano per la rotazione delle curve

sono, $\frac{p}{r} y\, d\, s$, o pure $\frac{p}{r} t\, d\, y$ nella ipotesi, in cui si dia la tangente. Di tutte queste formole noi faremo uso nella risoluzione de' seguenti

PROBLEMI.

CCCXXV. Fig. 8. Dividere l'angolo retto $B\, A\, C$ in due parti, in modo che il cono descritto dal piano $A\, D\, B$ intorno all'asse $A\, B$ sia in una ragione data al cono descritto dal piano $A\, D\, C$ intorno al secondo asse $A\, C$.

CCCXXVI. Fig. 9. Data la parabola Apolloniana $A\, D$, si cerca il solido generato dal piano $A\, D\, B$ rotato intorno all' asse $B\, A$.

CCCXXVII. Fig. 9. Si domandano le stesse proprietà presupposta data la sottangente della parabola $A\, D$.

CCCXXVIII. Fig. 10. Dimostrare il solido generato dal medesimo piano $A\, D\, B$ nell'ipotesi, che il movimento si produca intorno all'asse $H\, K$, o all'asse $2\, H\, 2\, K$.

CCCXXIX. Fig. 9. Determinare la ragione dei due solidi generati dalla rotazione del piano $A\, D\, B$ intorno all'asse $A\, B$, e del piano $A\, D\, K$ intorno all'asse $A\, H$.

CCCXXX. Fig. 9. Dividere l'angolo retto BAH per mezzo dell'arco parabolico AD, in maniera, che il solido prodotto dal piano parabolico ADB intorno all'asse AB sia in una qualunque data ragione al solido generato per la rivoluzione del piano parabolico ADK intorno alla tangente AH.

CCCXXXI. Fig. 11. Dato il quadrante ellittico $GDFA$, il di cui asse maggiore sia AF, ed il minore AG, ritrovare il so-

lido generato dal piano ellittico AGF rivolto intorno all'asse minore AG.

CCCXXXII. Fig. 11. Nella medesima ipotesi ritrovare il solido generato dal medesimo arco ellittico aggirato intorno al primo asse AF.

CCCXXXIII. Fig. 10. Data la parabola AD, ritrovar il solido generato dal piano parabolico BAD aggirato intorno alla linea $B2KD$.

CCCXXXIV. Fig. 12. Date due curve qualunque AD, AE, e di qualunque ordine, le quali si riferiscono ad una medesima ascissa, si cerca il solido generato dal piano ADE, che si muova intorno a qualunque asse HK, che però sia paralello ad AB.

CCCXXXV. Fig. 13. Dati due circoli $NMFEIO$, $MGDI$, si domanda il solido prodotta dalla lunula $MGDIEF$ rotante intorno all'asse NO.

CCCXXXVI. Dato il quadrante del circolo, il quale si aggira intorno al suo raggio, si cerca la superficie del quadrante nella sua rotazione.

CCCXXXVII. Data la tractoria la di cui equazione è $ds = -\frac{ady}{y}$ ritrovare la superficie, che si genererà nella rotazione del suo arco.

CCCXXXVIII. Ritrovare la superficie dell'arco logaritmico nella sua rotazione, la di cui equazione è $dx = -\frac{ady}{y}$.

Calcolo differenzio - differenziale.

CCCXXXIX. Gli stessi principj, per cui si distribuiscono le quantità finite ne' loro elementi, servono per determinare i dif-

ferenziali di secondo, o di terzo ordine. Le formole però divengono più complicate. Noi daremo pertanto le seconde differenze di qualunque quantità, ora si voglia costante qualunque elemento, ora si suppongano tutti variabili; e quindi l'equazione della parabola, non supposto niun elemento costante, ovvero posto costante dx, o dy.

CCCXL. Lo stesso si farà dell'equazioni al Circolo.

CCCXLI. All'Ellisse.

CCCXLII. All' Iperbola.

CCCXLIII. Alla Cissoide di Diocle, la di cui equazione è $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$

Formole.

1. $\sqrt{a^2 - x^2} = y$
2. xy posto costante dx
3. $\frac{x}{y}$ posto costante dy
4. $\sqrt{dy^2 + dx^2}$ posto costante dx, o dy

Della integrazione di alcune Formole differenzio - differenziali.

1. $x d^2 y + dx dy - y d^2 x - dx dy = o$
2. $x d^2 y - y d^2 x = o$
3. $y d^2 y = dx^2$ posto l'arco ds costante.
4. $2 dx dy + x d^2 y + 2 dx^2 = o$ posto costante dx.

10

Dell' uso del Calcolo differenzio - differenziale nel determinare i raggi osculatori.

CCCXLIV. Le curve, che hanno una tangente comune, si toccano solamente in un punto. La perpendicolare condotta per quel punto dicesi raggio osculatore. Diverse sono state le formole, per cui si possono determinare simili quantità. Noi proponiamo le più comuni. Non presupposta nessuna quantità costante, avremo per espressione analitica del raggio osculatore

$$R = \frac{d s^3}{d y \, d^2 x - d x \, d^2 y}$$

$$\text{Coradj} \begin{cases} 1. \; \dfrac{d x \, d s^2}{d y \, d^2 x - d x \, d^2 y} \\ 2. \; \dfrac{d y \, d s^2}{d y \, d^2 x - d x \, d^2 y} \end{cases}$$

CCCXLV. Queste formole vie più divengono semplici, supposto qualche elemento costante. Posto costante $d x$ avremo

$$R = \frac{- d s^3}{d x \, d^2 y}$$

$$\text{Coradj} \begin{cases} 1. \; \dfrac{- d s^2}{d^2 y} \\ 2. \; \dfrac{- d y \, d s^2}{d x \, d^2 y} \end{cases}$$

Posto costante $d\,y$, avremo

$$R = \frac{d\,s^3}{d\,y\,d^2\,x}$$

$$\text{Coradj}\begin{cases} 1.\ \dfrac{d\,x\,d\,s^2}{d\,y\,d^2\,x} \\ 2.\ \dfrac{d\,s^2}{d^2\,x} \end{cases}$$

CCCXLVI. Posto costante l'elemento $d\,s$, avremo queste altre espressioni analitiche delle stesse individue quantità, cioè

$$R = \frac{d\,y\,d\,s}{d^2\,x}$$

$$\text{Coradj}\begin{cases} 1.\ \dfrac{d\,x\,d\,y}{d^2\,x} \\ 2.\ \dfrac{d\,y^2}{d^2\,x} \end{cases}$$

CCCXLVII. Le stesse quantità si possono ottenere per altre formole, le quali non contengono se non differenziali del primo ordine. Noi dimostreremo pertanto, che l'espressione analitica del raggio osculatore, è $R = \frac{b\,dy}{d\,q}$, e $q = \frac{b\,dx}{d\,s}$ se la curva si dia per le coordinate ortogonali.

CCCXLVIII. Ma se la curva si riferisca al foco, avremo quest' altre $R = \frac{y\,d\,y}{d\,q}$, e $q = \frac{y\,d\,x}{d\,s}$. Faremo vedere l'uso di queste formole nella soluzione di alcuni problemi.

PROBLEMI DIRETTI.

CCCXLIX. Data l'equazione alla Parabola Apolloniana, definire il raggio osculatore, nell'ipotesi.

1.° Che nessun elemento sia costante:
2.° Che sia costante ds:
3.° Che sia costante dy:
4.° Che sia costante dx.

CCCL. Determinare similmente nell'equazione alla Parabola, i coradj, supposto qualche elemento costante.

CCCLI. Definire il raggio osculatore nella iperbola fra gli assintoti.

CCCLII. Prevalendoci delle formole, in cui si evitano i differenziali di secondo ordine, determineremo nella Parabola il raggio osculatore, o la curva si dia per le coordinate ortogonali, o si riferisca al foco.

CCCLIII. Definire nella stessa ipotesi il raggio osculatore nella spirale logaritmica, la di cui equazione è $dy = \frac{Sen.\, \varepsilon}{Cos.\, \varepsilon} = dx$.

PROBLEMI INVERSI.

CCCLIV. Fig. 5. Ritrovare la curva NOI, in cui supposte le ordinate paralelle, e preso $OQ = b$, tirando dal punto Q la normale QM al raggio osculatore $O2R$, nel punto M, in cui s'incontreranno le due linee, esista il centro dello stesso raggio.

CCCLV. Fig. 5. Determinare la curva NOI, la quale abbia la proprietà, che, se da un punto dato Q ad arbitrio si conduca la perpendicolare QM al raggio osculatore, sia $O2R : MO$ nella data ragione di $m : n$.

CCCLVI. Ritrovare la curva riferita all'asse, in cui il raggio osculatore si dia in qualunque maniera per y.

CCCLVII. Ritrovare la curva riferita al foco, in cui il raggio òsculatore si dia per l'ordinata y.

Dell'equazioni a differenze parziali.

CCCLVIII. Eulero, e d'Alembert furono i primi inventori del metodo per integrare l'equazioni a differenze parziali. I Signori Monge, De la-Place, Le-Gendre, e principalmente De la-Grange promossero, ed avanzarono la teorìa. Noi siamo debitori a quest'ultimo di un metodo generale per integrare l'equazioni a differenze parziali del primo ordine tra un numero qualunque di variabili, nelle quali le differenze parziali sono lineari. Di questo stesso metodo si servì M.r Monge nell'equazioni differenziali del secondo ordine, e ne ottenne in molti casi l'integrale completo. L'integrazione di questa sorte d'equazioni presenta difficoltà maggiori, che l'integrazione dell'equazioni differenziali: anzi l'integrazione di queste si reputa compita, quando si può ridurre alla integrazione di un'equazione a differenze ordinarie. Perciò noi additeremo soltanto una sì difficile teorìa proponendo alcune

Formole da integrarsi

$$x\,y - \left\{\frac{d^2 z}{d\,x\,d\,y}\right\} = o$$

$$x + y + u - \left\{\frac{d\,z^2}{d\,x}\right\} = o$$

$$x\,y\,u - \left\{\frac{d^3 z}{d\,x\,d\,y\,d\,u}\right\} = o$$

$$\left\{\frac{d^2 z}{d\,x^2}\right\} = \frac{1}{x-y}\left\{\frac{d\,z}{d\,x}\right\} + 2\,a\,.\,\overline{x-y}^3$$

$$\left\{\frac{d^2 z}{d\,x^2}\right\} = \frac{1}{x-y}\left\{\frac{d\,z}{d\,x}\right\}$$

$$\left\{\frac{d^2 z}{d\,x\,d\,y}\right\} = -\,y\,.\,\sqrt{x^2 - y^2}$$

CALCOLO
Delle Variazioni.

CCCLIX. Giovanni Bernoulli fu il primo, che si propose il problema di determinare fra le infinite curve, che uniscono due punti, quella curva, per cui discendendo il corpo impiegasse il minimo possibil tempo. Stimolati i Matematici dal suo esempio intrapresero sin d'allora a trattare altre questioni consimili, e risolsero molti problemi riconosciuti col nome di *Problemi Isoperimetrici*. Questo genere di problemi è affatto diverso da quelli, che

abbiamo risoluti pel metodo dei massimi, e dei minimi; poichè in essi mediante la differenziale si passa da un punto ad un altro della curva medesima, quando in questi si fa passaggio da un punto di una curva, o retta qualunque ad un punto di un' altra curva, o retta infinitamente vicina. Pur nondimeno il loro metodo non era generale. Noi siamo debitori della universalità di questo metodo all'immortale Eulero nel suo egregio opuscolo, che ha per titolo = *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimique proprietate gaudentes* = a cui egli, e M.r De la Grange hanno dato compimento nel nuovo calcolo delle variazioni, di sommo uso in molte parti della Matematica, e principalmente nella Meccanica, per determinare le variazioni, ed i massimi, e i minimi delle forze nei corpi procedenti dalle diverse direzioni, con cui agiscono le potenze. Noi ne daremo qualche piccola idea.

Variare le seguenti formole.

$(du, d^2u, d^3u,)$ $(du, du^3, du^m$ ec.$)$

Supposto $p = \frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx} = q, \frac{dq}{dx} = r$ ec.

Ritrovare la variazione delle medesime quantità, presupposta una delle variabili costante, o nessuna.

CCCLX. Variare l'equazione

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr \text{ ec.}$$
$$+ N1 dz + P1 dp1 + Q1 dq1 + R \text{ ec.}$$
$$+ \text{ ec.}$$

PROBLEMI.

CCCLXI. Ritrovare la curva, in cui posto $S V d x = S \overline{a x - y^2} . y d x$ sia $S V d x$ un massimo, o un minimo.

CCCLXII. Determinare la curva, la di cui equazione $S \overline{15 a^2 x^2 y - 15 a^3 x y + 5 a^2 y^3 - 3 y^5} . d x$ sia $S V d x$ un massimo, o un minimo.

CCCLXIII. Fra le infinite curve, che hanno un'ascissa comune, e che congiungono due punti, determinare quella, per cui il corpo discenderebbe nel più breve tempo, o in cui $S \frac{d x \sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{x}}$ sia un massimo.

CCCLXIV. Fra tutte le curve, che sieno della stessa lunghezza, e che uniscono due punti, determinar quella curva, la di cui area sia la massima, o la minima.

FINE.